Sala IME/ITA

Análise Combinatória
Problemas Diversos

Professor

Adenilson Bonfim

20 – 06 – 2020

Princípio Multiplicativo

Considere as Vogais: A, E, I, O, U

De quantas formas podemos ordená-las?

$$\text{A}\begin{cases} B \\ C \\ D \\ E \end{cases} \quad \text{4 Opções}$$

$$\text{B}\begin{cases} A \\ C \\ D \\ E \end{cases}$$

...

$$\text{E}\begin{cases} A \\ B \\ C \\ D \end{cases}$$

$$\text{A}\begin{cases} B\begin{cases} C \\ D \\ E \end{cases} \\ C\begin{cases} B \\ D \\ E \end{cases} \\ D\begin{cases} B \\ C \\ E \end{cases} \\ E\begin{cases} B \\ C \\ D \end{cases} \end{cases} \quad \text{3 Opções}$$

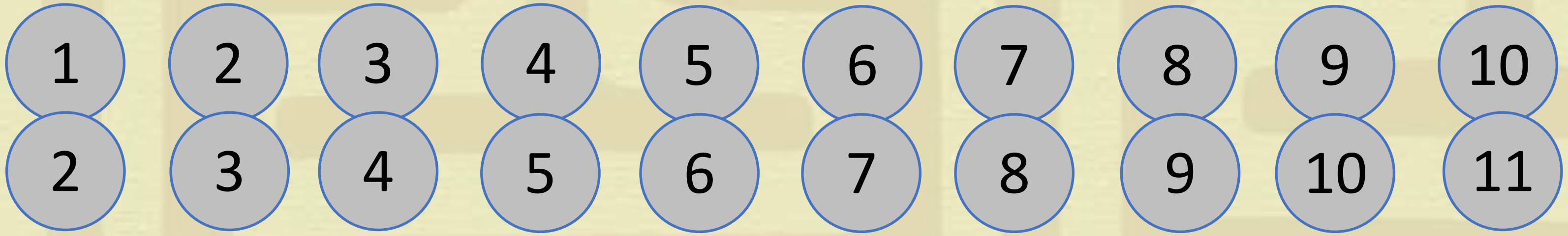
$$\text{A}\begin{cases} B\begin{cases} C\begin{cases} D \\ E \end{cases} \\ D\begin{cases} C \\ E \end{cases} \\ E\begin{cases} C \\ D \end{cases} \\ \cdots \end{cases} \end{cases} \quad \text{2 Opções}$$

$$\text{A}\begin{cases} B\begin{cases} C\begin{cases} D\{E \\ E\{D \end{cases} \\ D\begin{cases} C\{E \\ E\{C \end{cases} \\ E\begin{cases} C\{D \\ D\{C \end{cases} \\ \cdots \end{cases} \end{cases} \quad \text{1 Opção}$$

$$5\ ,\ 4\ .\ 3\ .\ 2\ .\ 1 = 5! = 120 \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{A}\ ,\ 4\ .\ 3\ .\ 2\ .\ 1 = 24 \\ \text{B}\ ,\ 4\ .\ 3\ .\ 2\ .\ 1 = 24 \\ \text{C}\ ,\ 4\ .\ 3\ .\ 2\ .\ 1 = 24 \\ \text{D}\ ,\ 4\ .\ 3\ .\ 2\ .\ 1 = 24 \\ \text{E}\ ,\ 4\ .\ 3\ .\ 2\ .\ 1 = 24 \end{cases}$$

- (ITA – Adaptada) As faces de dez moedas são numeradas de modo que: a primeira moeda tem faces 1 e 2; a segunda, 2 e 3; a terceira, 3 e 4, e assim sucessivamente até a décima moeda, com faces 10 e 11. Se as dez moedas são lançadas aleatoriamente, qual a quantidade de resultados possíveis?

<u>Solução</u>:



$$N_{TOTAL} = 2 \,.\, 2 \,.\, 2. \,...\, .\, 2 = 2^{10}$$

- (OBM) Cinco amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo, devem formar uma fila com outras 30 pessoas. De quantas maneiras podemos formar esta fila de modo que Arnaldo fique na frente de seus 4 amigos? (Obs.: Os amigos não precisam ficar em posições consecutivas.)

<u>Solução</u>:

$N_{TOTAL} = N_A + N_B + N_C + N_D + N_E = 35.34.33.32. \ldots .1 = 35!$

Arnaldo a frente dos colegas ? ? ?

$N_A = N_B = N_C = N_D = N_E \Rightarrow \mathbf{N_A = 35!\,/\,5}$

Princípio Aditivo

- Um número quatro dígitos distintos é dito paroara se ele é par. Quantos números paroaras existem?

$N = ABCD$

9 ou 8			5
$\neq 0$			$\{0,2,4,6,8\}$

$N_1 = ABCD_0$

9	8	7	1
$\neq 0$			$\{0\}$

$= 504$

$N_2 = ABCD_*$

8	8	7	4
$\neq 0$			$\{2,4,6,8\}$

$= 1792$

$\mathbf{N_{TOTAL}} = N_1 \mathbf{+} N_2 = 504 \mathbf{+} 1792 = \mathbf{2296}$

Permutação - Arranjo - Combinação

Considere 8 atletas em uma prova de 100m rasos

- Quantos ordenamentos são possíveis para a chegada. (**Permutação**)

8	7	6	5	4	3	2	1
1ª Pos	2ª Pos	3ª Pos	...	...	...	...	8ª Pos

$P_8 = 8!$

- Quantos ordenamentos são possíveis para os três medalhistas. (**Arranjo**)

8	7	6
1ª Pos	2ª Pos	3ª Pos

$$A_{8,3} = 8 \,.\, 7 \,.\, 6 = \frac{8!}{5!} = \frac{8!}{(8-3)!}$$

Permutação - Arranjo - Combinação

Considere 8 atletas em uma prova de 100m rasos

- Quantos são os possíveis trios de medalhistas, desconsiderando-se a qualidade da medalha. (**Combinação** = Arranjo / Permutação)

8	7	6
1ª Pos	2ª Pos	3ª Pos

$$C_{8,3} = \frac{8\,.\,7\,.\,6}{3\,.\,2\,.1} = \frac{8!}{3!\,.\,5!} = \frac{8!}{3!.(8-3)!}$$

• De quantas maneiras podemos colocar, em cada espaço abaixo, um entre os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, de modo que todos os seis algarismos apareçam e formem, em cada membro, números de três algarismos que satisfazem a dupla desigualdade?

_ _ _ > _ _ _ > _ _ _

Solução:

Unidades são livres _ _ 9 > _ _ 8 > _ _ 7

Dezenas são livres _ **6** 9 > _ **5** 8 > _ **4** 7

Os três algarismos que sobram devem obedecer a ordem decrescente nas centenas

Maior Intermediário Menor

1 .6 .9 > **1** .5 .8 > **1** .4 .7

Resp: $\mathbf{A_{9,6} = 9!\,/\,3!}$

Permutação com elementos repetidos

• (ITA – Adaptada) As faces de dez moedas são numeradas de modo que: a primeira moeda tem faces 1 e 2; a segunda, 2 e 3; a terceira, 3 e 4, e assim sucessivamente até a décima moeda, com faces 10 e 11. Se as dez moedas são lançadas aleatoriamente, de quantas formas podemos obter a soma 59?

Solução:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$S_{mín} = 1+2+...+10 = 55$

$S_{máx} = 2+3+...+11 = 65$

m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
M	M	M	M	M	M	M	M	M	M

$M = m + 1$

$\mathbf{S} = \mathbf{59} = S_{mín} + 4$

$$N_{S=59} = P_{10}^{4,6} = \frac{10!}{4!.6!} = \frac{10.9.8.7.6!!}{4.3.2.1.6!} = 210$$

- (OBM) Esmeralda, a digitadora, tentou digitar um número de seis algarismos, mas os dois algarismos 1 não apareceram (a tecla devia estar com defeito). O que apareceu foi 2004. Quantos são os números de seis algarismos que ela pode ter tentado digitar?

Solução:

$N_{TOTAL} = N_{juntos} + N_{separados}$

$N_{juntos} = P_5^4 = \dfrac{5!}{4!} = 5$ __ 2 11 0 __ 0 __ 4 __ $\Leftrightarrow$ V n V V V

$N_{separados} = P_5^{2,3} = \dfrac{5!}{2!.3!} = 10$ _1_ 2 _1_ 0 __ 0 __ 4 __ $\Leftrightarrow$ 1 1 V V V

$N_{TOTAL} = N_{juntos} + N_{separados} = 5 + 10 = 15$

Permutação com elementos repetidos

- (OBM) Esmeralda, a digitadora, tentou digitar um número de seis algarismos, mas os dois algarismos 1 não apareceram (a tecla devia estar com defeito). O que apareceu foi 2004. Quantos são os números de seis algarismos que ela pode ter tentado digitar?

Solução 2:

$$N_{Total} = \frac{P_6^2}{4!} = \frac{6!}{2!.4!} = \frac{6.5.4!}{2.4!} = 15$$

1 1 2 0 0 4

- (EN) A partir de um conjunto de 19 atletas, formam 57 times de 4 atletas cada. Todos os atletas participam de um mesmo número de times e cada par de atletas fica junto no mesmo time um mesmo número x de vezes. O valor de x é:

Solução: Duplas

Total de duplas: $C_{19,2} = 19.18 / 2.1 = 19.9$

Duplas em 57 times = $57 \cdot C_{4,2} = 3.19.4.3/2.1 = 2.9.19$

Número de duplas repetidas: $\mathbf{x} = \dfrac{2.9.19}{9.19} = \mathbf{2}$

- Bagual ganhou seis livros diferentes de Matemática, três livros diferentes de Física e dois livros diferentes de Português. Resolveu colocá-los enfileirados em sua prateleira onde havia lugar para nove livros, deixando os livros de uma mesma disciplina agrupados e os dois excedentes serão doados. Se os livros doados forem de Matemática, a quantidade de modos para organizar a prateleira será:

<u>Solução</u>:

$A_{6,4} = 6.5.4.3$	$P_4 = 4.3.2.1$	$P_2 = 2.1$
Matemática	Física	Português

$\times\ P_3$

Resp: 6! . 4! . 3!

• (EN) Um grupo de 8 cientistas trabalha num projeto altamente sigiloso, cujos planos são guardados em um armário. Eles desejam que o armário só possa ser aberto, quando pelo menos 5 cientistas estiverem presentes. . Para que isso aconteça, são instalados cadeados no armário e cada cientista recebe as chaves de alguns cadeados. Suponha que tenha sido instalada a menor quantidade possível de cadeados.

a) Quantos cadeados foram instalados? **b)** Quantas chaves cada cientista recebeu?

Solução:

a) Do enunciado, todos os quartetos não conseguem abrir pelo menos um cadeado.

Total de Quartetos: $C_{8,4} = \frac{8!}{4!.4!} = \frac{8.7.6.5.4!}{4!.4.3.2.1} = 70$ quartetos => **70 cadeados no mínimo**

b) Sejam os cientistas: A B C D E F G H e o cadeado K_1 aquele que não é aberto pelo quarteto ABCD, então obrigatoriamente será aberto por E, F, G e, também, H, pois todos os quintetos ABCDE, ABCDF, ABCDG e ABCDH têm de abrir K_1, ou seja, **há 4 chaves que abrem K_1**.

Consequentemente, há 4 chaves para cada um dos 70 cadeados, totalizando 280 chaves. Assim: $\mathbf{N_{ch/cient} = 280/8 = 35}$

- Determine o número de subconjuntos de $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ em que $x + y = 101$, com $x, y \in A$, não possua solução.

Solução:

$N[\text{Subconj}(A)] = 2^{n(A)} = 2^{100}$ (lembrete)

Duplas que somam 101:

$\{1, 100\}$; $\{2, 99\}$; $\{3, 98\}$; ... ; $\{50, 51\}$ => 50 duplas $\{x, y\}$

$\text{Subconj}'(A) \subseteq \{D_1, D_2, D_3, \ldots, D_{50}\}$

$\{1, 100, \emptyset\}$; $\{2, 99, \emptyset\}$; $\{3, 98, \emptyset\}$; ... ; $\{50, 51, \emptyset\}$ => 50 trios

$N[\text{Subconj}'(A)] = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 3^{50}$

- Determine o número de funções $f:\{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \{1981, 2000, 2010\}$ em que a soma $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n)$ não é divisível por 3.

Solução:

Divisibilidade por três:

Soma-se os algarismos do número N e verifica-se a divisibilidade para essa soma, o resto será o mesmo resto para N.

Assim:

$$\begin{cases} 1981 = 3K + 1 \\ 2000 = 3K + 2 \\ 2010 = 3K \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n-1) = 3w + 1 & \Rightarrow f(n) = 3a + 2 \\ f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n-1) = 3w + 2 & \Rightarrow f(n) = 3a + 1 \\ f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n-1) = 3w & \Rightarrow f(n) = 3a \end{cases}$$

Logo:

$$N = N_{f(1)} \,.\, N_{f(2)} \,.\, N_{f(3)} \,.\, \ldots \,.\, N_{f(n-1)} \,.\, N_{f(n)} = 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, 3 \,.\, 2 = 2.3^{n-1}$$

• Quantos são os subconjuntos de três elementos do conjunto X = {1, 2, 3, ... , 20} de forma que o produto desses 3 elementos seja múltiplo de 4.

<u>Solução</u>:

Caso 1: **P , P , P** $\Rightarrow C_{10,3} = \dfrac{10!}{3!.7!} = \dfrac{10.9.8.7!}{3.2.1.7!} = 120$

Caso 2: **P , P , I** $\Rightarrow C_{10,2}\,.10 = \dfrac{10!}{2!.8!}\,.10 = \dfrac{10.9.8!}{2.1.8!}\,.10 = 450$

Caso 3: $\mathbf{P_{M(4)}}$ **, I , I** $\Rightarrow 5.C_{10,2} = 5.\dfrac{10!}{2!.8!} = 5.\dfrac{10.9.8!}{2.1.8!} = 225$

M(4) = { 4, 8, 12, 16, 20}

$N_{total} = 120 + 450 + 225 = 795$

• Considere 10 pessoas, todas de alturas diferentes, as quais devem ficar em fila de tal modo que, a partir da pessoa mais alta, as alturas devem decrescer para ambos os lados da fila (se a pessoa mais alta for a primeira ou a última da fila, todas as pessoas a partir dela devem estar em ordem decrescente de altura). Obedecendo essas condições, de quantos modos essas pessoas podem ficar em fila?

<u>Solução</u>:

Considere $P_1 < P_2 < P_3 < ... < P_{10}$

Iniciando por P_{10} quando definirmos quem ficará a sua esquerda, só haverá uma forma de organização à esquerda e também à direita.

$$P_2 \;<\; P_6 \;<\; P_{10} \;>\; P_9 \;>\; P_8 \;>...$$

Assim:

$P_i = 2$ opções, $i = 1, ... , 9$

Ou seja: $\mathbf{N = 2^9}$

- Considere 10 pessoas, todas de alturas diferentes, as quais devem ficar em fila de tal modo que, a partir da pessoa mais alta, as alturas devem decrescer para ambos os lados da fila (se a pessoa mais alta for a primeira ou a última da fila, todas as pessoas a partir dela devem estar em ordem decrescente de altura). Obedecendo essas condições, de quantos modos essas pessoas podem ficar em fila, **se a pessoa mais alta estiver na 4ª posição da fila**?

Solução:

Terça-feira – Video no YOUTUBE – ADENILSON BONFIM

Sala IME/ITA

Análise Combinatória
Problemas Diversos

Professor

Adenilson Bonfim

20 – 06 – 2020