Cálculo Diferencial e Integral e suas aplicações na Geometria

COLÉGIO Ciências Aplicadas

Prof. Adriano Jorge

Cálculo Diferencial e Integral

O Cálculo Diferencial e Integral, como a gente conhece hoje, foi criado no século XVII e está associado aos nomes de Newton(inglês) e Leibniz(alemão).

O Cálculo tem inicialmente três “operações-bases”

I. Cálculo de limites
II. Cálculo de derivadas
III. Cálculo de integrais de diferenciais

O estudo do Cálculo está associado ao estudo de funções.

Suponha uma função, $Y = f(x)$, definida em um intervalo real.

$f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

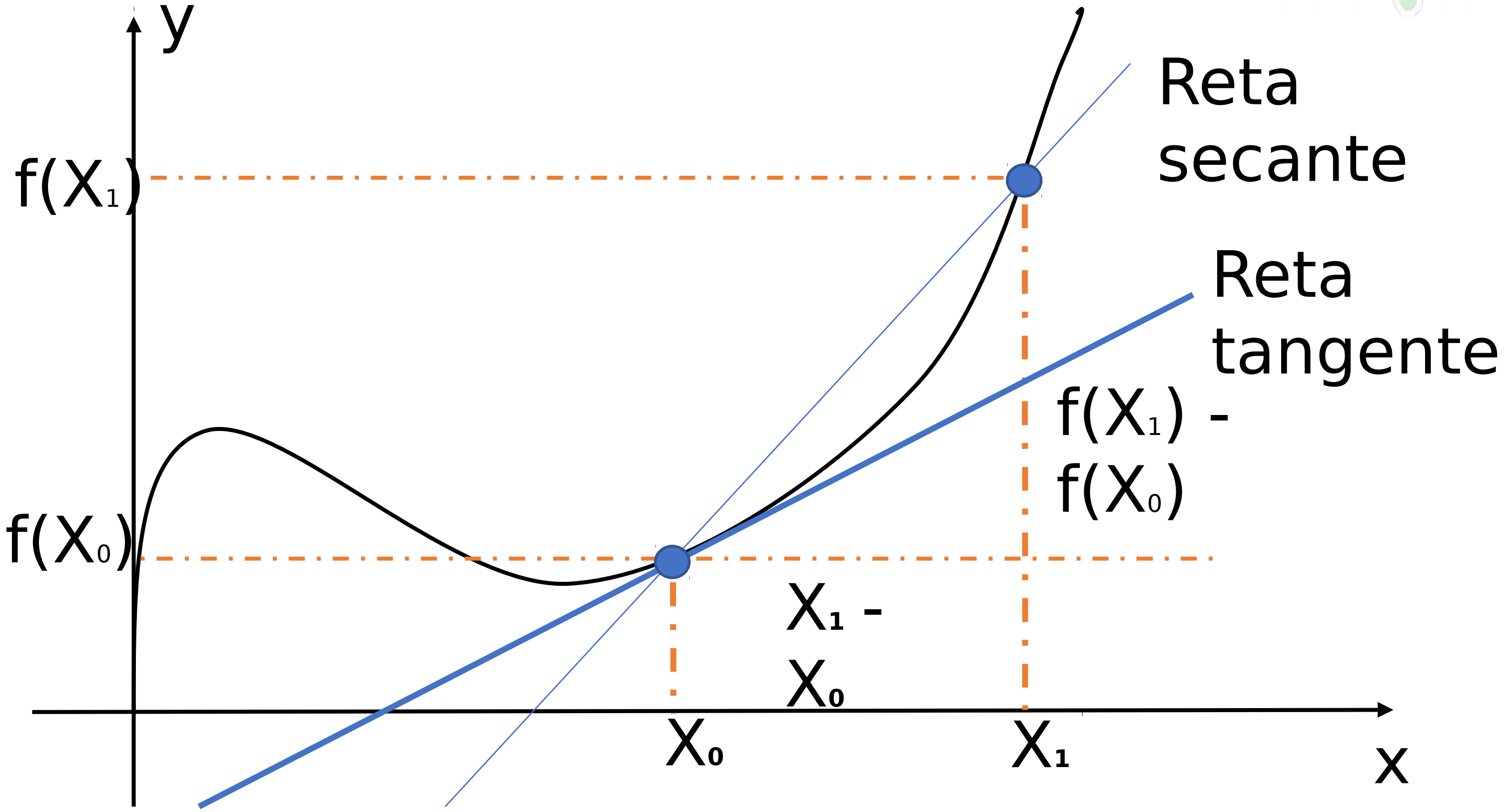
$Y = f(x)$

$Y = f(x)$

Taxa média de variação

$$m = \frac{f(X_1) - f(X_0)}{X_1 - X_0}$$

Coeficiente angular da reta secante



Coeficiente angular da reta tangente

$$m = \lim_{X_1 \to X_0} \frac{f(X_1) - f(X_0)}{X_1 - X_0}$$

Derivada

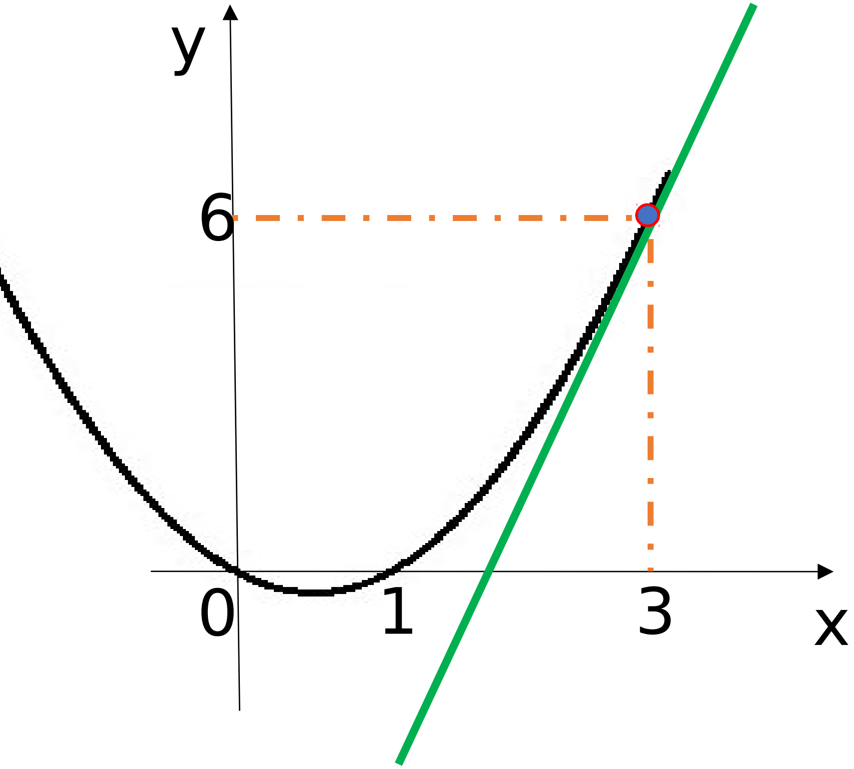
Equação da reta $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$

A função só é derivável se o limite existir e for finito.

Símbolos usados para expressar a derivada de uma função f(x) em x_0

$f'(x_0)$ $\qquad$ $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ $\qquad$ $\dot{f}(x_0)$

Exemplo: Encontrar o coeficiente angular e a equação da reta tangente ao gráfico da função, $y = f(x) = x^2 - x$, no ponto $x_0 = 3$.



$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$m = \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

$$m = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-(9-3)}{x-3}$$

$$m = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9-(x-3)}{x-3}$$

$$m = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)-(x-3)}{x-3}$$

$$m = \lim_{x\to 3} x+3-1$$

$$m = 5$$

$$m = \frac{y - y_P}{x - x_P}$$

$$5 = \frac{y-6}{x-3}$$

$$y - 6 = 5x - 15$$

$$y = 5x - 9$$

Exemplo: Encontrar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função, $y = f(x) = x^3$, no ponto x_0.

Derivada

$y = f(x) = x^3$

$$y' = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$y' = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0}$$

Diferença de dois cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$y' = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2)}{x - x_0}$$

$$y' = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} x^2 + x x_0 + x_0^2$$

$$y' = f'(x_0) = 3\, x_0^2$$

$$y' = f'(x) = 3\, x^2$$

Derivadas Básicas

COLÉGIO Ciências Aplicadas

1) $f(x) = c\ (cte) \Rightarrow f'(x) = 0$

2) $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

3) $f(x) = a\,x \Rightarrow f'(x) = a$

4) $f(x) = a x^n \Rightarrow f'(x) = a n x^{n-1}$

5) $(f+g)' = f' + g'$

6) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

7) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)\left(f(x) - f(x_0)\right) + f(x_0)\left(g(x) - g(x_0)\right)}{x - x_0}$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Trigonométricas

1) $f(x) = sen\,x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

2) $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -sen\,x$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{sen\,x - sen\,x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2 sen\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}{x - x_0}$$

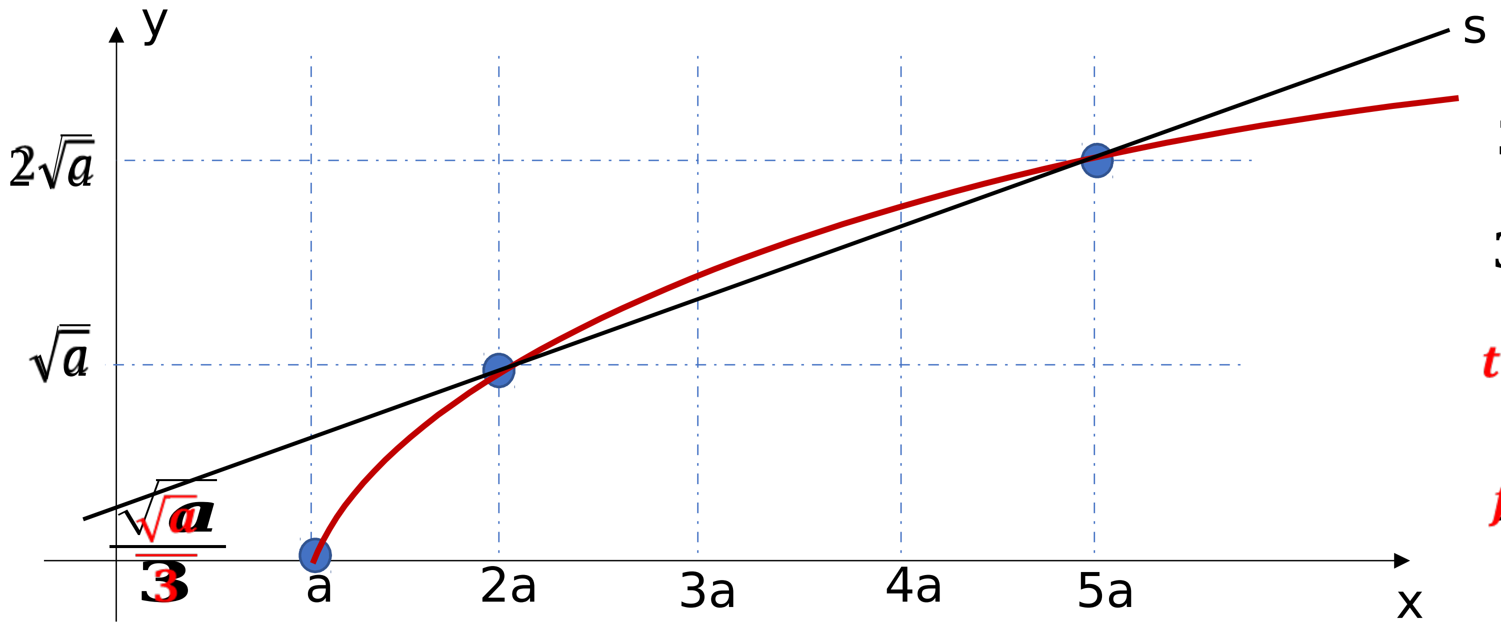
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{sen\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}{\frac{x - x_0}{2}} = \cos x_0$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{sen\,t}{t} = 1$$

3) $f(x) = tg\,x = \dfrac{sen\,x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - sen\,x\,(-sen\,x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = sec^2 x$

(Ime 2020) Considere a função $f(x)=\sqrt{x-a}$, $x \geq a$, onde a é um número real positivo. Seja s a reta secante ao gráfico de f em $(2a, f(2a))$ e $(5a, f(5a))$ e t a reta tangente ao gráfico de f que é paralela à reta s. A área do quadrilátero formado pela reta s, a reta t, a reta $x = 2a$ e a reta $x = 5a$ é $\sqrt{2}$ unidades de área. O valor de a, em unidades de comprimento, é:

a) $2\sqrt{3}$ b) 4 c) 2 d) $3\sqrt{2}$ e) $2\sqrt[3]{4}$



Coeficiente angular da reta s: $m=\frac{\sqrt{a}}{3a}$

Equação da reta s

$$m=\frac{y-y_p}{x-x_p} \rightarrow \frac{\sqrt{a}}{3a}=\frac{y-\sqrt{a}}{x-2a} \rightarrow$$

$$3ay-3a\sqrt{a}=x\sqrt{a}-2a\sqrt{a}$$

$$3ay=x\sqrt{a}+a\sqrt{a} \rightarrow y=\frac{\sqrt{a}}{3a}x+\frac{\sqrt{a}}{3}$$

$$t \parallel s \rightarrow m_t=m_s=\frac{\sqrt{a}}{3a}$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

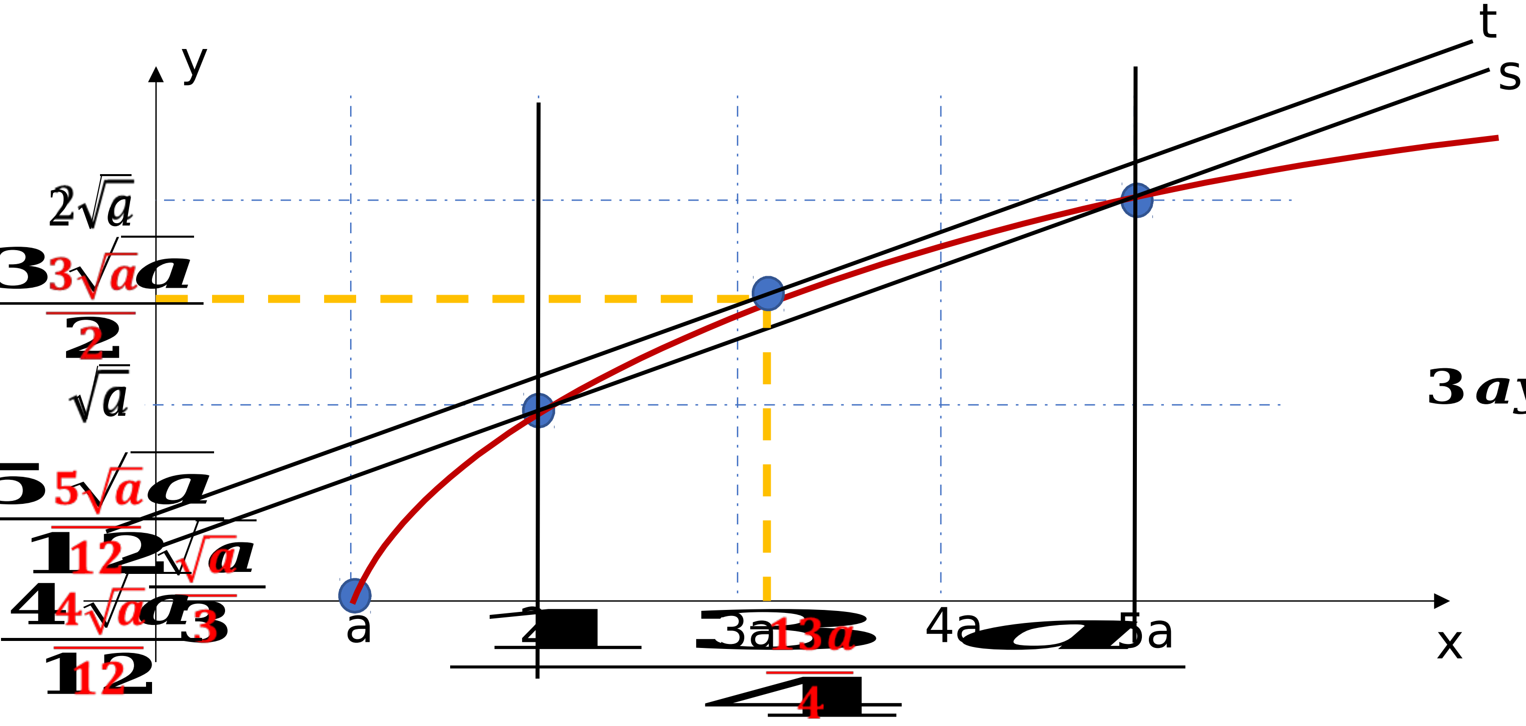
$$\frac{\sqrt{a}}{3a}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x-a}-\sqrt{x_0-a}}{x-x_0}\cdot\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x_0-a}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x_0-a}}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-a-x_0+a}{(x-x_0)\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x_0-a}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-a}}$$

COLÉGIO Ciências Aplicadas

$$\frac{\sqrt{a}}{3a} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x-a}-\sqrt{x_0-a}}{x-x_0}\cdot\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x_0-a}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x_0-a}} = \lim_{x\to x_0}\frac{x-a-x_0+a}{(x-x_0)\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x_0-a}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x_0-a}}$$

$$\frac{a}{9a^2} = \frac{1}{4(x_0-a)} \Rightarrow 4x_0 - 4a = 9a \to x_0 = \frac{13a}{4}$$

$$y=\sqrt{\frac{13a}{4}-a}=\sqrt{\frac{9a}{4}}=\frac{3\sqrt{a}}{2}$$



Equação da reta t

$$m=\frac{y-y_p}{x-x_p} \to \frac{\sqrt{a}}{3a}=\frac{y-3\sqrt{a}/2}{x-13a/4}\to$$

$$3ay-\frac{9a\sqrt{a}}{2}=x\sqrt{a}-13a\sqrt{a}/4$$

$$3ay = x\sqrt{a}+\frac{5a\sqrt{a}}{4} \to y=\frac{x\sqrt{a}}{3a}+\frac{5\sqrt{a}}{12}$$

$$\sqrt{2}=\frac{\sqrt{a}}{12}:3a \to 2=\frac{a^3}{16}\to a=\sqrt[3]{8\cdot 4}=2\sqrt[3]{4}$$

COLÉGIO Ciências Aplicadas

Prof. Adriano Jorge
adriano-holanda@uol.com.b