FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

Matemática A

10° ano

PRÉ-REQUISITOS

Definição 1. *Chama-se de* ***função quadrática*** *(9° ano) toda função que pertence à família de funções* $f(x) = ax^2$, *com* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

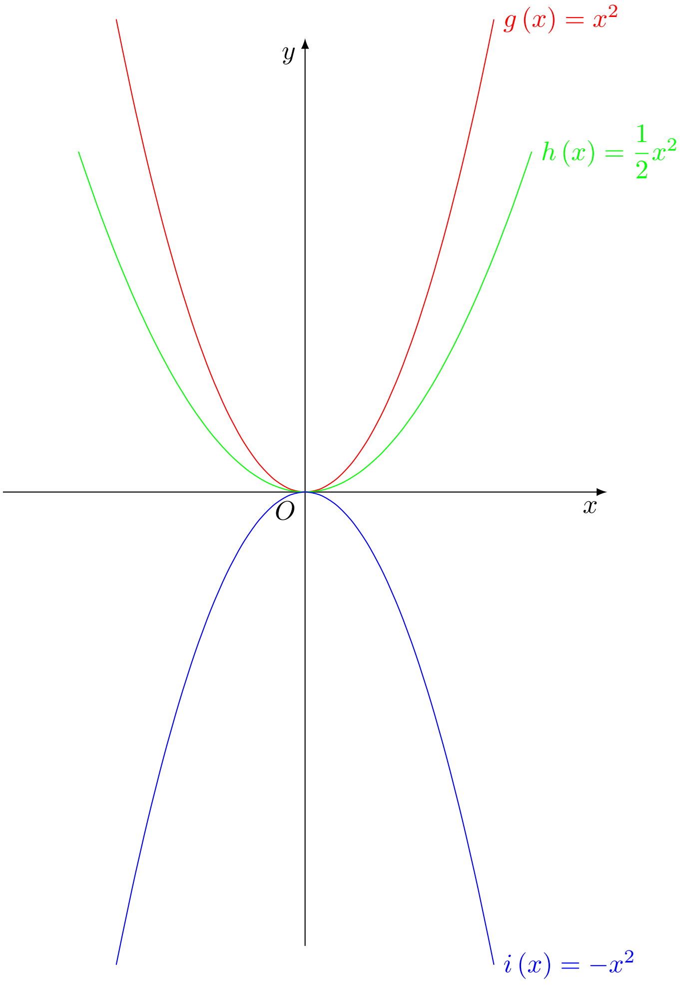

Figura 1

Teorema 1. *Seja* f *uma função real de variável real. A representação gráfica da função* $g(x) = f(x-h) + k$, *com* $h, k \in \mathbb{R}$, *corresponde à translação de vetor* $(h; k)$ *de cada ponto do gráfico de* f.

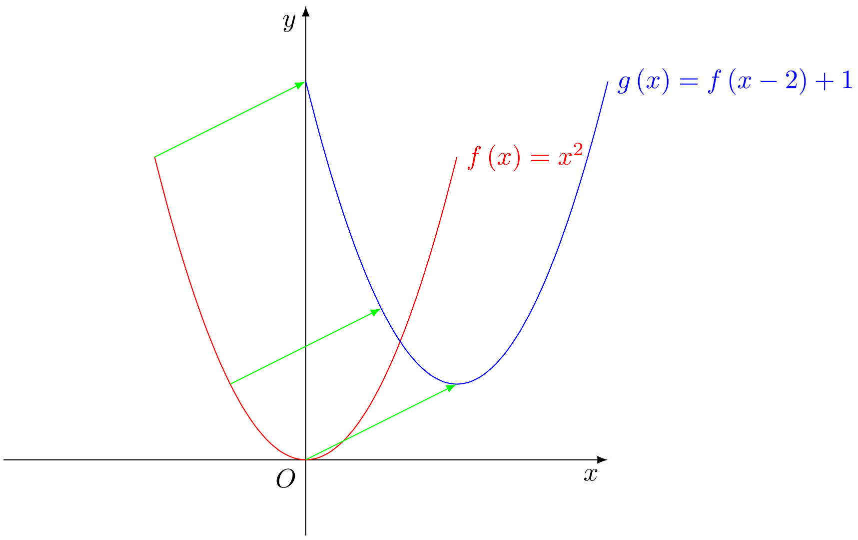

Figura 2

Definição 2. *Seja f uma função real de variável real e $p, q \in D_f$ com $p < q$.*

- *Diz-se que f tem a **concavidade voltada para cima** em $]p; q[$ se, e somente se, $\dfrac{f(c) - f(b)}{c - b} > \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, $\forall a, b, c \in \,]p; q[$, com $a < b < c$.*
- *Diz-se que f tem a **concavidade voltada para baixo** em $]p; q[$ se, e somente se, $\dfrac{f(c) - f(b)}{c - b} < \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, $\forall a, b, c \in \,]p; q[$, com $a < b < c$.*

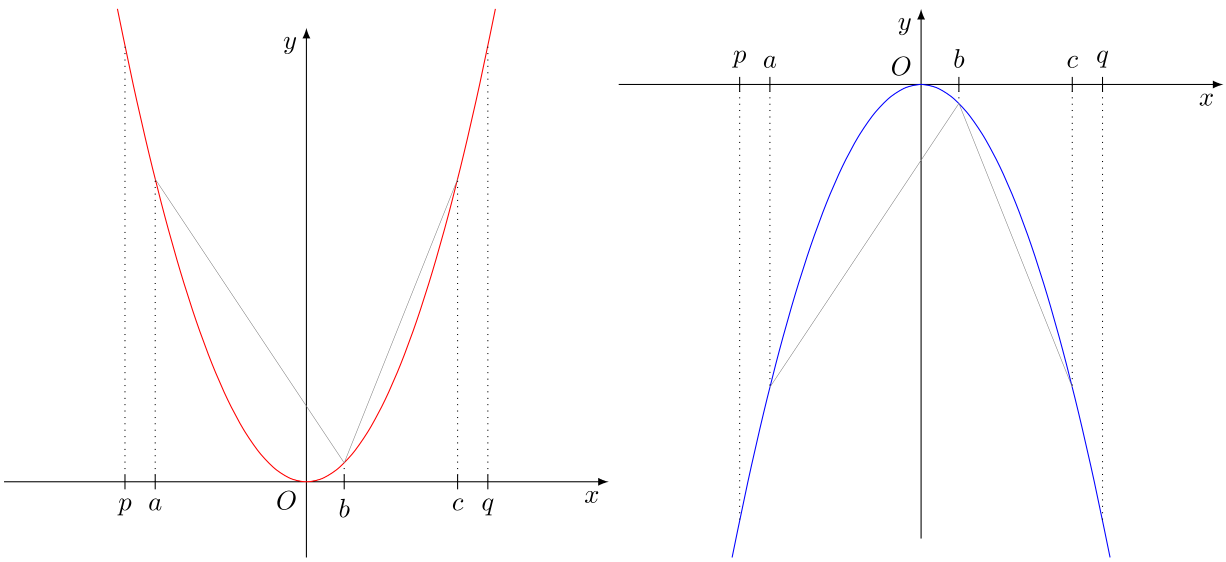

Figura 3

FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Definição 3. *Chama-se de **função quadrática** toda função que pertence à família de funções $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b, c \in \mathbb{R}$.*

Teorema 2. *Toda função f quadrática da forma $f(x) = ax^2+bx+c$ pode ser escrita na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, com $h = -\dfrac{b}{2a}$, $k = -\dfrac{\Delta}{4a}$ e $\Delta = b^2 - 4ac$.*

Demonstração. Desenvolvendo $f(x) = a(x-h)^2 + k$, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-h)^2 + k \\ &= a\left(x^2 - 2hx + h^2\right) + k \\ &= ax^2 - 2ahx + ah^2 + k \end{aligned}$$

Assim, para que $ax^2 + bx + c = ax^2 - 2ahx + ah^2 + k$ devemos ter:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a = a \\ b = -2ah \\ c = ah^2 + k \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} h = -\dfrac{b}{2a} \\ k = c - ah^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} h = -\dfrac{b}{2a} \\ k = c - a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} h = -\dfrac{b}{2a} \\ k = c - \dfrac{b^2}{4a} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} h = -\dfrac{b}{2a} \\ k = \dfrac{4ac - b^2}{4a} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} h = -\dfrac{b}{2a} \\ k = -\dfrac{\Delta}{4a}, \text{ com } \Delta = b^2 - 4ac \end{cases} \end{aligned}$$

□

Teorema 3. *Seja f uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.*

- *Se $a > 0$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima.*
- *Se $a < 0$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo.*

Demonstração. Seja g a função definida por $g(x) = ax^2$. Como f é uma translação de g, então, basta mostrar que, se $a > 0$, então o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima, e se $a < 0$, então o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo.

Considere os números $r, s, t \in \mathbb{R}$ tais que $r < s < t$. Para mostrar que g tem a concavidade voltada para cima, devemos mostrar que $\dfrac{g(t) - g(s)}{t-s} > \dfrac{g(s) - g(r)}{s-r}$, ou seja, devemos mostrar que $\dfrac{g(t) - g(s)}{t-s} - \dfrac{g(s) - g(r)}{s-r} > 0$.

E para mostrar que g tem a concavidade voltada para baixo, devemos mostrar que $\dfrac{g(t) - g(s)}{t-s} < \dfrac{g(s) - g(r)}{s-r}$, ou seja, devemos mostrar que $\dfrac{g(t) - g(s)}{t-s} - \dfrac{g(s) - g(r)}{s-r} < 0$.

Assim, desenvolvendo $\dfrac{g(t) - g(s)}{t-s} - \dfrac{g(s) - g(r)}{s-r}$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{g(t) - g(s)}{t-s} - \frac{g(s) - g(r)}{s-r} &= \frac{at^2 - as^2}{t-s} - \frac{as^2 - ar^2}{s-r} \\ &= a\left(\frac{t^2 - s^2}{t-s} - \frac{s^2 - r^2}{s-r}\right) \\ &= a\left(\frac{(t-s)(t+s)}{t-s} - \frac{(s-r)(s+r)}{s-r}\right) \\ &= a(t + s - s - r) \\ &= a(t-r) \end{aligned}$$

Então, se $a > 0$, temos que $a\,(t - r) > 0$, ou seja, g tem a concavidade voltada para cima, e se $a < 0$, temos que $a\,(t - r) < 0$, ou seja, g tem a concavidade voltada para baixo.

$\square$

Teorema 4. *Seja f uma função quadrática da forma $f\,(x) = ax^2 + bx + c$.*

- *Se $\Delta > 0$, então f tem dois zeros reais: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.*
- *Se $\Delta = 0$, então f tem um zero real: $x = -\dfrac{b}{2a}$.*
- *Se $\Delta < 0$, então f não tem zeros reais.*

Demonstração. Resolvendo a equação $f\,(x) = 0$, temos:

$$\begin{aligned} f\,(x) = 0 &\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a\,(x - h)^2 + k = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - h)^2 = -\frac{k}{a} \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \end{aligned}$$

Se $\Delta < 0$, então $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$ é impossível, ou seja, f não tem zeros reais.

Se $\Delta = 0$, então $x + \dfrac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$.

Se $\Delta > 0$, então:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

$\square$