Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais

Aulão Brasil

Arthur Hermsdorff Cezar – Tuzin

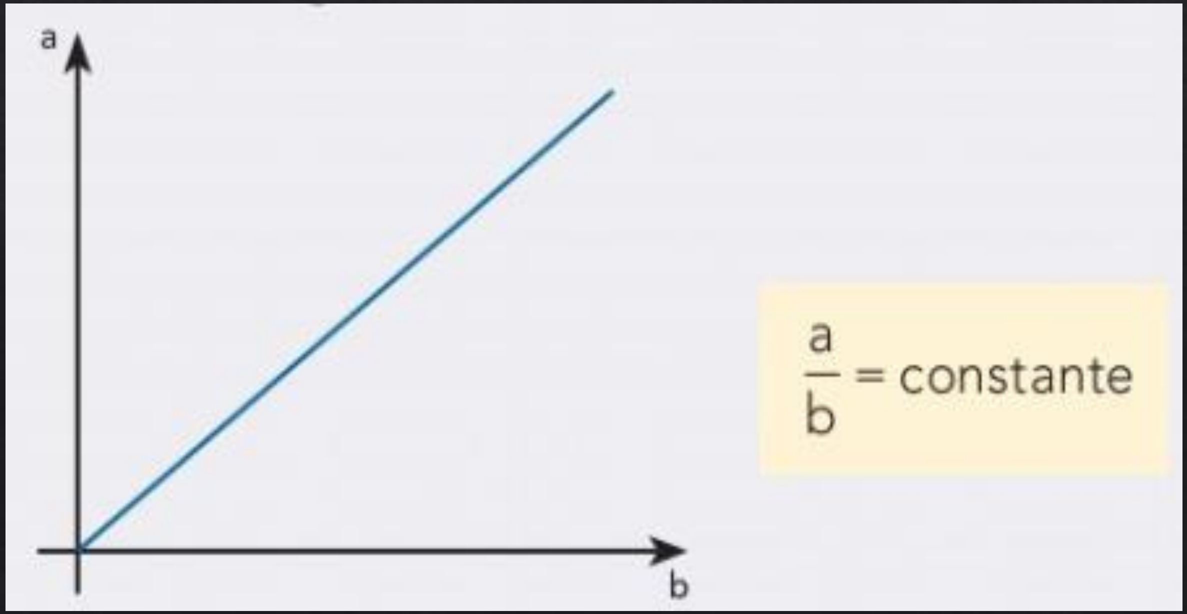
Colégio e Pré-Vestibular Fibonacci (Ipatinga-MG)

Relevância do tema

- Muito importante;
- Questões em cada um dos ENEMs desde 2009.

Grandezas diretamente proporcionais

- Definem-se como grandezas diretamente proporcionais aquelas que são representadas em forma de fração, sendo resultado de sua razão uma constante não nula.
- Assim, se a e b são diretamente proporcionais, tem-se graficamente:



Grandezas diretamente proporcionais

- **Exemplos:**

- **A velocidade escalar média e a distância percorrida por um automóvel num mesmo intervalo de tempo $\left(\frac{d}{v} = \Delta t\right)$;**

- **Aceleração da gravidade e Peso $\left(\frac{P}{g} = m\right)$.**

Grandezas diretamente proporcionais

Considere o problema seguinte:

Dividir R$ 448,00 entre duas crianças, uma com 7 anos e a outra com 9. Cada uma delas deverá receber uma quantia diretamente proporcional à sua respectiva idade.

a) Escreva um sistema de equações correspondente ao problema.

b) Resolva o sistema e apresente a solução do problema.

$$\frac{a}{b} = constante$$

$$\frac{a}{b} = K$$

$a \rightarrow quantia\ recebida\ (reais)$

b $\rightarrow idade\ (anos)$

1ª criança:

$$\frac{a_1}{b_1} = K$$

$$\frac{a_1}{7} = K$$

2ª criança:

$$\frac{a_2}{b_2} = K$$

$$\frac{a_2}{9} = K$$

$$\frac{a_1}{7} = \frac{a_2}{9} = \frac{a_1 + a_2}{7 + 9} = K$$

$$\frac{a_1}{7} = \frac{a_2}{9} = \frac{448}{16}$$

Grandezas diretamente proporcionais

Considere o problema seguinte:

Dividir R$ 448,00 entre duas crianças, uma com 7 anos e a outra com 9. Cada uma delas deverá receber uma quantia diretamente proporcional à sua respectiva idade.

a) Escreva um sistema de equações correspondente ao problema.

b) Resolva o sistema e apresente a solução do problema.

$$\frac{a_1}{7} = \frac{a_2}{9} = \frac{448}{16}$$

$$\frac{a_1}{7} = \frac{448}{16}$$

$$\frac{a_1}{7} = 28$$

$$a_1 = 196\,reais$$

$$\frac{a_2}{9} = \frac{448}{16}$$

$$\frac{a_2}{9} = 28$$

$$a_2 = 252\,reais$$

Grandezas diretamente proporcionais

Considere o problema seguinte:

Dividir R$ 448,00 entre duas crianças, uma com 7 anos e a outra com 9. Cada uma delas deverá receber uma quantia diretamente proporcional à sua respectiva idade.

a) Escreva um sistema de equações correspondente ao problema.

b) Resolva o sistema e apresente a solução do problema.

$a_1 + a_2 = 448$

$7K + 9K = 448$

$\frac{a}{b} = constante$

$\frac{a}{b} = K$

$a \rightarrow quantia\ recebida\ (reais)$

$\mathrm{b} \rightarrow idade\ (anos)$

1ª criança:

$\frac{a_1}{b_1} = K$

$\frac{a_1}{7} = K$

$a_1 = 7K$

2ª criança:

$\frac{a_2}{b_2} = K$

$\frac{a_2}{9} = K$

$a_2 = 9K$

$16K = 448$

$K = 28$

$a_1 = 7K = 7 . 28$

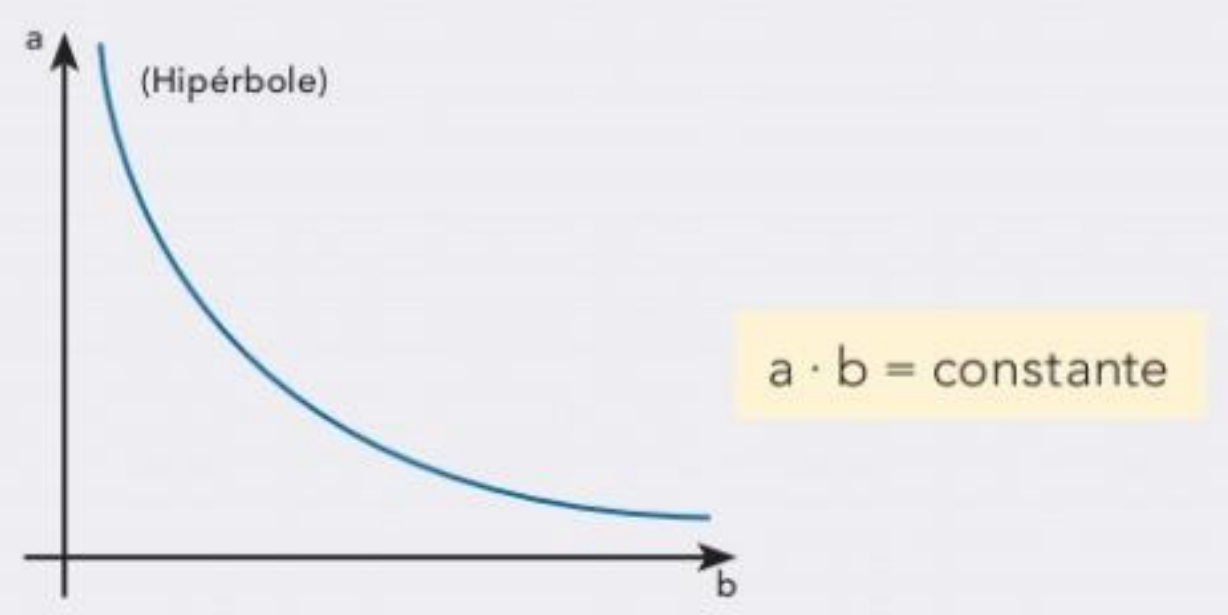
$a_1 = 196$ reais

$a_2 = 9K = 9 . 28$

$a_2 = 252$ reais

Grandezas inversamente proporcionais

- Definem-se como grandezas inversamente proporcionais aquelas que são representadas em forma de um produto cujo resultado é sempre uma constante não nula.
- Assim, se a e b são inversamente proporcionais, tem-se graficamente:



Grandezas inversamente proporcionais

- Exemplos:

- A velocidade escalar média e o intervalo de tempo de um automóvel percorrendo uma determinada distância $(d = v \, . \, \Delta t)$;

- A base e a altura de um retângulo, considerando uma mesma área (A = b . h).

Grandezas inversamente proporcionais

(ENEM) Pedro ganhou R$ 360000,00 em uma loteria federal e resolveu dividir integralmente o prêmio entre os seus três filhos, Ana, Renato e Carlos, de forma que cada um receba uma quantia que seja inversamente proporcional às suas idades. Sabendo que Ana tem 4 anos, Renato, 5 anos e Carlos, 20 anos, eles receberão, respectivamente,

a) R$ 54 000,00; R$ 216 000,00 e R$ 90 000,00.
b) R$ 90 000,00; R$ 54 000,00 e R$ 216 000,00.
c) R$ 216 000,00; R$ 90 000,00 e R$ 54 000,00.
d) R$ 180 000,00; R$ 144 000,00 e R$ 36 000,00.
e) R$ 180 000,00; R$ 120 000,00 e R$ 60 000,00.

$a\,.\,b = constante$

$a\,.\,b = K$

$a \rightarrow quantia\ recebida\ (reais)$

$\mathrm{b} \rightarrow idade\ (anos)$

$\boldsymbol{Ana}$:

$A\,.\,4 = K$

$$A = \frac{K}{4}$$

$\boldsymbol{Renato}$:

$R\,.\,5 = K$

$$R = \frac{K}{5}$$

$Carlos$:

$C\,.\,20 = K$

$$C = \frac{K}{20}$$

Grandezas inversamente proporcionais

(ENEM) Pedro ganhou R$ 360000,00 em uma loteria federal e resolveu dividir integralmente o prêmio entre os seus três filhos, Ana, Renato e Carlos, de forma que cada um receba uma quantia que seja inversamente proporcional às suas idades. Sabendo que Ana tem 4 anos, Renato, 5 anos e Carlos, 20 anos, eles receberão, respectivamente,

a) R$ 54 000,00; R$ 216 000,00 e R$ 90 000,00.
b) R$ 90 000,00; R$ 54 000,00 e R$ 216 000,00.
c) R$ 216 000,00; R$ 90 000,00 e R$ 54 000,00.
d) R$ 180 000,00; R$ 144 000,00 e R$ 36 000,00.
e) R$ 180 000,00; R$ 120 000,00 e R$ 60 000,00.

$$A + R + C = 360.000$$

$$\frac{K}{4} + \frac{K}{5} + \frac{K}{20} = 360.000$$

$$\frac{5K + 4K + K}{20} = 360.000$$

$$\frac{10\,K}{20} = 360.000$$

$$\frac{K}{2} = 360.000$$

$$K = 720.000$$

Grandezas inversamente proporcionais

(ENEM) Pedro ganhou R$ 360000,00 em uma loteria federal e resolveu dividir integralmente o prêmio entre os seus três filhos, Ana, Renato e Carlos, de forma que cada um receba uma quantia que seja inversamente proporcional às suas idades. Sabendo que Ana tem 4 anos, Renato, 5 anos e Carlos, 20 anos, eles receberão, respectivamente,

a) R$ 54000,00; R$ 216000,00 e R$ 90000,00.
b) R$ 90000,00; R$ 54000,00 e R$ 216000,00.
c) R$ 216000,00; R$ 90000,00 e R$ 54000,00.
d) R$ 180000,00; R$ 144000,00 e R$ 36000,00.
e) R$ 180000,00; R$ 120000,00 e R$ 60000,00.

$\boldsymbol{Ana}$:

$$A = \frac{K}{4}$$

$$A = \frac{720.000}{4} = 180.000$$

Renato:

$$R = \frac{K}{5}$$

$$R = \frac{720.000}{5} = 144.000$$

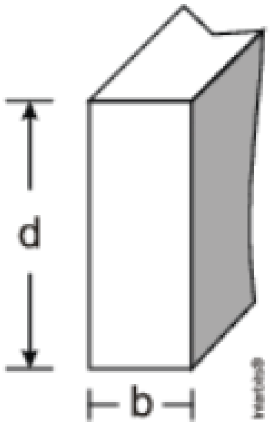
Carlos:

$$C = \frac{K}{20}$$

$$C = \frac{720.000}{20} = 36.000$$

Aplicações da proporcionalidade: Fórmulas e relações entre variáveis

A resistência das vigas de dado comprimento é diretamente proporcional à largura *(b)* e ao quadrado da altura *(d)*, conforme a figura. A constante de proporcionalidade *k* varia de acordo com o material utilizado na sua construção.



Considerando-se *S* como a resistência, a representação algébrica que exprime essa relação é

a) $S = k \cdot b \cdot d$

b) $S = b \cdot d^2$

c) $S = k \cdot b \cdot d^2$

d) $S = \frac{k \cdot b}{d^2}$

e) $S = \frac{k \cdot d^2}{b}$

$$S \, \alpha \, b$$

$$S \, \alpha \, d^2$$

$$S = k \, . \, b \, . \, d^2$$

Aplicações da proporcionalidade: Fórmulas e relações entre variáveis

Suponha que a carga suportada por uma viga seja diretamente proporcional à sua largura e ao quadrado de sua espessura e inversamente proporcional ao seu comprimento. Sabendo que uma viga de 2 m de comprimento, 15 cm de largura e 10 cm de espessura suporta uma carga de 2.400 kg, qual é a carga suportada por uma viga de 20 cm de largura, 12 cm de espessura e 2,4 m de comprimento?

a) 2.880 kg.
b) 3.200 kg.
c) 3.456 kg.
d) 3.840 kg.
e) 4.608 kg.

$$C \; \alpha \; l$$

$$C \; \alpha \; e^2$$

$$C \; \alpha \; \frac{1}{c}$$

$$C = K\frac{l\,.\,e^2}{c}$$

$$2400 = K\frac{15\,.\,10^2}{200}$$

$$\mathrm{K} = \frac{2400\,.\,200}{15\,.\,100}$$

$$\mathrm{K} = \frac{2400\,.\,2}{15}$$

$$\mathrm{K} = \frac{4800}{15}$$

$$\mathrm{K} = 320$$

$$C = K\frac{l\,.\,e^2}{c}$$

$$C = 320\frac{20\,.\,12^2}{240}$$

$$C = 320\frac{12\,.\,12}{12}$$

$$C = 320\,.\,12$$

$$C = 3840\;Kg$$

Aplicações da proporcionalidade: Regra de três simples

O hábito de comer um prato de folhas todo dia faz proezas para o corpo. Uma das formas de variar o sabor das saladas é experimentar diferentes molhos. Um molho de iogurte com mostarda contém 2 colheres de sopa de iogurte desnatado, 1 colher de sopa de mostarda, 4 colheres de sopa de água, 2 colheres de sopa de azeite.

DESGUALDO. P. *Os Segredos da Supersalada*. Revista Saúde. Jan. 2010.

Considerando que uma colher de sopa equivale a aproximadamente 15 mL, qual é o número máximo de doses desse molho que se faz utilizando 1,5 L de azeite e mantendo a proporcionalidade das quantidades dos demais ingredientes?

a) 5
b) 20
c) 50
d) 200
e) 500

1 colher de sopa -------------- 15 mL
2 colheres de sopa -------------- x

$x = 2.\ 15$

$x = 30$ mL

30 mL -------------- 1 dose
1500 mL -------------- y

$y = 50$ doses

Aplicações da proporcionalidade: Escala

- A escala pode ser definida como a relação entre o comprimento gráfico e o comprimento real correspondente.
- Escala numérica:
  - É a escala representada sobre a forma de uma razão (1:200.000) ou de uma fração $\left(\frac{1}{200.000}\right)$.
  - Nesse caso, cada unidade no mapa ou desenho técnico corresponde a 200.000 unidades no lugar real.

Um mapa é a representação reduzida e simplificada de uma localidade. Essa redução, que é feita com o uso de uma escala, mantém a proporção do espaço representado em relação ao espaço real.
Certo mapa tem escala 1: 58.000.000.

Disponível em: http://oblogdedaynabrigth.blogspot.com.br. Acesso em: 9 ago. 2012.

Considere que, nesse mapa, o segmento de reta que liga o navio à marca do tesouro meça 7,6 cm.

A medida real, em quilômetro, desse segmento de reta é

a) 4.408.
b) 7.632.
c) 44.080.
d) 76.316.
e) 440.800.

$$Escala = \frac{Medida_{mapa}}{Medida_{real}}$$

$$\frac{1}{58.000.000} = \frac{7,6}{x}$$

$$x = 7,6\,.\,58\,.\,10^6$$

$$x = 440,8\,.\,10^6\ cm$$

$$x = 440,8\,.\,10^6\,.\,10^{-5}\ Km$$

$$x = 440,8\,.\,10^1\ Km$$

$$x = 4408\ Km$$

1 cm -------------- 58.000.000 cm
1 cm -------------- 580 Km
7,6 cm -------------- x

$$x = 4408\ Km$$

Aplicações da proporcionalidade: Escala

Comum em lançamentos de empreendimentos imobiliários, as maquetes de condomínios funcionam como uma ótima ferramenta de marketing para as construtoras, pois, além de encantar clientes, auxiliam de maneira significativa os corretores na negociação e venda de imóveis.
Um condomínio está sendo lançado em um novo bairro de uma cidade. Na maquete projetada pela construtora, em escala de $1:200$, existe um reservatório de água com capacidade de $45\ cm^3$.
Quando todas as famílias estiverem residindo no condomínio, a estimativa é que, por dia, sejam consumidos 30.000 litros de água.

Em uma eventual falta de água, o reservatório cheio será suficiente para abastecer o condomínio por quantos dias?

a) 30
b) 15
c) 12
d) 6
e) 3

$$Escala_{comprimento} = \frac{1}{200}$$

$$Escala_{volume} = \left(\frac{1}{200}\right)^3 = \left(\frac{1}{2\,.\,10^2}\right)^3$$

$$Escala_{volume} = \frac{1}{8\,.\,10^6} = \frac{Volume_{maquete}}{Volume_{real}}$$

$$\frac{1}{8\,.\,10^6} = \frac{45}{x}$$

$$x = 360\,.\,10^6\ cm^3$$

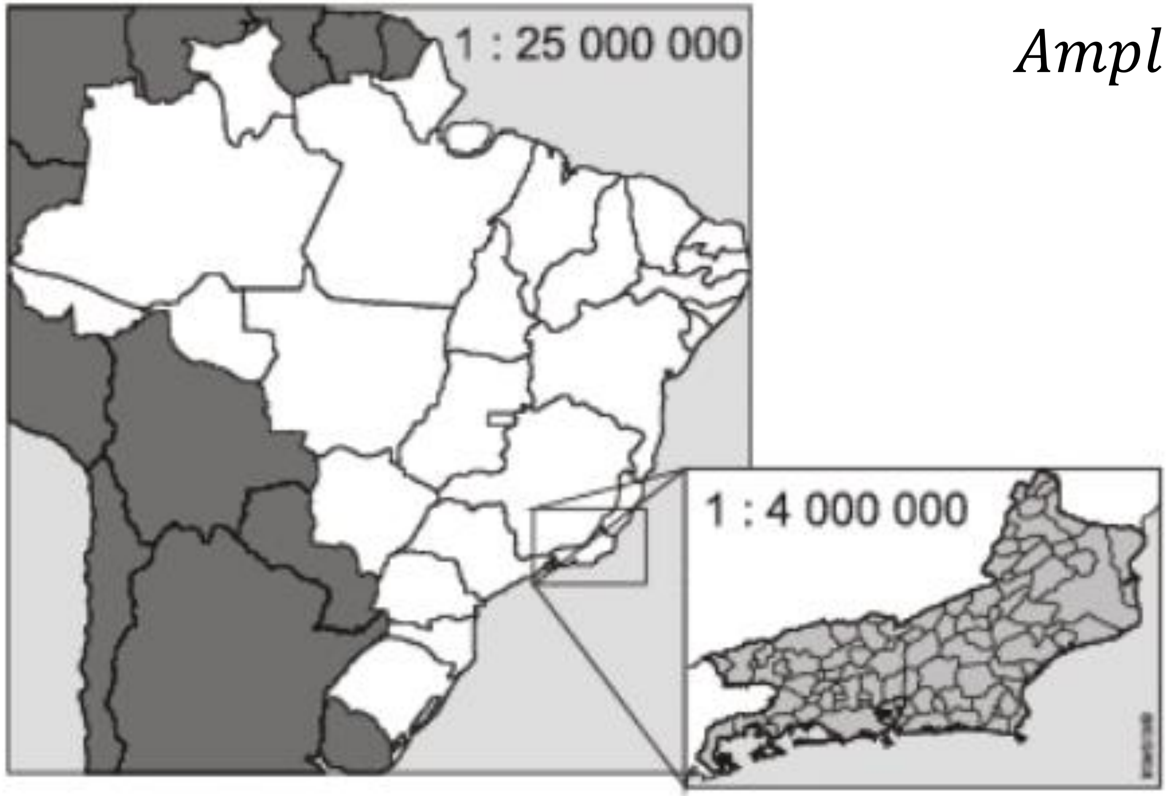
$$x = 360\,.\,10^6\,.\,10^{-3} dm^3$$

$$x = 360\,.\,10^3\ L$$

30.000 L ------ 1 dia
360.000 L ------ y

y = 12 dias

A figura apresenta dois mapas, em que o estado do Rio de Janeiro é visto em diferentes escalas.



$$Ampliação = \frac{Escala_{maior}}{Escala_{menor}} = \frac{Escala_{RJ}}{Escala_{Brasil}}$$

$$Ampliação = \frac{\frac{1}{4.000.000}}{\frac{1}{25.000.000}}$$

$$Ampliação = \frac{25.000.000}{4.000.000}$$

$$Ampliação = \frac{25}{4}$$

Há interesse em estimar o número de vezes que foi ampliada a área correspondente a esse estado no mapa do Brasil.

Esse número é

$$Ampliação_{Área} = \left(\frac{25}{4}\right)^2 \qquad Ampliação_{Área} = 39{,}1$$

$$Ampliação_{Área} = \frac{625}{16}$$

a) menor que 10.
b) maior que 10 e menor que 20.
c) maior que 20 e menor que 30.
d) maior que 30 e menor que 40.
e) maior que 40.