# Determinantes de matrizes grandes e o teorema de Jacobi

Para além do Teorema de Laplace

Uma aula do
Prof. Leandro Linhares
(o Tio Linha)

Estamos acostumados a ver o determinante como

uma “conta pronta” apenas para matrizes de ordem $\mathbf{1 \times 1}$, $\mathbf{2 \times 2}$ ou $\mathbf{3 \times 3}$...

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{a_1}) = +\boldsymbol{a_1}$$

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} \end{pmatrix} = +\boldsymbol{a_1 b_2} - \boldsymbol{a_2 b_1}$$

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{b_3} \\ \boldsymbol{c_1} & \boldsymbol{c_2} & \boldsymbol{c_3} \end{pmatrix} = +\boldsymbol{a_1 b_2 c_3} + \boldsymbol{a_2 b_3 c_1} + \boldsymbol{a_3 b_1 c_2} - \boldsymbol{a_1 b_3 c_2} - \boldsymbol{a_2 b_1 c_3} - \boldsymbol{a_3 b_2 c_1}$$

De ordem $\mathbf{4} \times \mathbf{4}$ para cima somos apresentados a teoremas como Laplace e Chió...

Esses teoremas reduzem a ordem da matriz, ou seja, calculam o determinante da matriz de ordem grande através de determinantes de matrizes de ordem menor...

Mas afinal, quem é o determinante da matriz grande?

O determinante de uma matriz $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ é uma soma de $\boldsymbol{n}!$ parcelas.

Cada parcela é formada por:

1) Um sinal algébrico ($+$ ou $-$);
2) Um produto de $\boldsymbol{n}$ elementos da matriz, escolhidos de maneira que haja exatamente um de cada linha e um de cada coluna.

Existem $\boldsymbol{n}!$ maneiras diferentes de se escolher $\boldsymbol{n}$ elementos da matriz com a restrição de que haja exatamente um de cada linha e um de cada coluna...

Para cada uma dessas formas diferentes possíveis de se escolher esses $\boldsymbol{n}$ elementos temos uma parcela no determinante!

Por exemplo, um determinante $\mathbf{4 \times 4}$ tem um total de $\mathbf{4! = 24}$ parcelas:

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{cases} +a_1b_2c_3d_4 & +a_3b_1c_2d_4 & -a_1b_2c_4d_3 & -a_3b_1c_4d_2 \\ +a_1b_3c_4d_2 & +a_3b_2c_4d_1 & -a_1b_3c_2d_4 & -a_3b_2c_1d_4 \\ +a_1b_4c_2d_3 & +a_3b_4c_1d_2 & -a_1b_4c_3d_2 & -a_3b_4c_2d_1 \\ +a_2b_1c_4d_3 & +a_4b_1c_3d_2 & -a_2b_1c_3d_4 & -a_4b_1c_2d_3 \\ +a_2b_3c_1d_4 & +a_4b_2c_1d_3 & -a_2b_3c_4d_1 & -a_4b_2c_3d_1 \\ +a_2b_4c_3d_1 & +a_4b_3c_2d_1 & -a_2b_4c_1d_3 & -a_4b_3c_1d_2 \end{cases}$$

Encontrar quais são as $\boldsymbol{n}!$ maneiras de se escolher $\boldsymbol{n}$ elementos da matriz, com exatamente um de cada linha e um de cada coluna, não é difícil...

O grande problema está no SINAL ALGÉBRICO!

As parcelas foram apresentadas com as linhas ordenadas (letras em ordem alfabética) e as colunas embaralhadas (índices numéricos). Vamos então aliviar a notação:

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{cases} +a_1b_2c_3d_4 & +a_3b_1c_2d_4 & -a_1b_2c_4d_3 & -a_3b_1c_4d_2 \\ +a_1b_3c_4d_2 & +a_3b_2c_4d_1 & -a_1b_3c_2d_4 & -a_3b_2c_1d_4 \\ +a_1b_4c_2d_3 & +a_3b_4c_1d_2 & -a_1b_4c_3d_2 & -a_3b_4c_2d_1 \\ +a_2b_1c_4d_3 & +a_4b_1c_3d_2 & -a_2b_1c_3d_4 & -a_4b_1c_2d_3 \\ +a_2b_3c_1d_4 & +a_4b_2c_1d_3 & -a_2b_3c_4d_1 & -a_4b_2c_3d_1 \\ +a_2b_4c_3d_1 & +a_4b_3c_2d_1 & -a_2b_4c_1d_3 & -a_4b_3c_1d_2 \end{cases}$$

$$\to \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{cases} +1234 & +3124 & -1243 & -3142 \\ +1342 & +3241 & -1324 & -3214 \\ +1423 & +3412 & -1432 & -3421 \\ +2143 & +4132 & -2134 & -4123 \\ +2314 & +4213 & -2341 & -4231 \\ +2431 & +4321 & -2413 & -4312 \end{cases}$$

Para cada permutação dos dígitos de $\mathbf{1}$ a $\boldsymbol{n}$ atribuímos um sinal algébrico. Como funciona isso?

Vamos definir uma PERMUTAÇÃO como uma FUNÇÃO BIJETORA,
a qual chamaremos de $\boldsymbol{\sigma}$.
O domínio e o contra-domínio dessa função são o conjunto dos naturais de $\mathbf{1}$ a $\boldsymbol{n}$.

Escrevemos, por exemplo, para a permutação $\mathbf{2431}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{1}) = \mathbf{2} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{2}) = \mathbf{4} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{3}) = \mathbf{3} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{4}) = \mathbf{1} \end{cases}$$

Seja $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{\sigma})$ a quantidade de pares ordenados $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$, com $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, tais que $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}) > \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})$.

Se $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{\sigma})$ for PAR, então o sinal algébrico é POSITIVO.
Se $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{\sigma})$ for ÍMPAR, então o sinal algébrico é NEGATIVO.

Novamente no exemplo da permutação $\mathbf{2431}$...

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Os pares ordenados $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$, com $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, tais que $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}) > \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})$ são

$$(\mathbf{1}, \mathbf{4}) \quad ; \quad (\mathbf{2}, \mathbf{3}) \quad ; \quad (\mathbf{2}, \mathbf{4}) \quad ; \quad (\mathbf{3}, \mathbf{4})$$

Note...

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Então $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{4}$, que é par, logo atribuímos o sinal POSITIVO à permutação $\mathbf{2431}$.

Na prática funciona assim...

À chamada PERMUTAÇÃO IDENTIDADE $(\boldsymbol{\sigma_{id}})$ atribuímos sempre o sinal POSITIVO, pois $\boldsymbol{s(\sigma) = 0}$ para qualquer $\boldsymbol{n}$.

Exemplo de permutação identidade: $\boldsymbol{\sigma_{id}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

Note que ela representa
O PRODUTO DOS ELEMENTOS DA DIAGONAL PRINCIPAL DA MATRIZ!

Para as outras permutações (diferentes da identidade) contabilizamos quantas trocas entre vizinhos foram necessárias para se chegar naquela permutação, partindo-se da identidade.

Se esse número de trocas for par, então o sinal é positivo. Se for ímpar, negativo.

Ex.: $\underbrace{\mathbf{12}}\,\mathbf{34} \to \mathbf{2}\,\underbrace{\mathbf{13}}\,\mathbf{4} \to \mathbf{23}\,\underbrace{\mathbf{14}} \to \mathbf{2}\,\underbrace{\mathbf{34}}\,\mathbf{1} \to \mathbf{2431}$

Quatro trocas, logo $\mathbf{2431}$ é positivo!

Trocar dois elementos NÃO VIZINHOS pode ser usado também...

Afinal, se existem $\boldsymbol{p}$ elementos entre os dois que se deseja trocar
($\boldsymbol{p = 0}$ para vizinhos)
trocá-los diretamente é o mesmo que realizar $\boldsymbol{2p + 1}$ trocas entre vizinhos.

Ex.: 1 troca direta do tipo

$$\boldsymbol{\underbrace{1}234\underbrace{5} \rightarrow 52341}$$

equivale a 7 trocas de vizinhos

$$\boldsymbol{123\underbrace{45} \rightarrow 12\underbrace{35}4 \rightarrow 1\underbrace{25}34 \rightarrow \underbrace{15}234 \rightarrow 5\underbrace{12}34 \rightarrow 52\underbrace{13}4 \rightarrow 523\underbrace{14} \rightarrow 52341}$$

ELITE
CURITIBA

# Árvore do Tio Linha

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| +1 | +12 | +123 | +1234 | | |
| | | | -1243 | | |
| | | | +1423 | | |
| | | | -4123 | >>> | -41235 |
| | | -132 | -1324 | | +41253 |
| | | | +1342 | | -41523 |
| | | | -1432 | | +45123 |
| | | | +4132 | | -54123 |
| | | +312 | +3124 | | |
| | | | -3142 | | |
| | | | +3412 | | |
| | | | -4312 | | |
| | -21 | -213 | -2134 | | |
| | | | +2143 | >>> | +21435 |
| | | | -2413 | | -21453 |
| | | | +4213 | | +21543 |
| | | +231 | +2314 | | -25143 |
| | | | -2341 | | +52143 |
| | | | +2431 | | |
| | | | -4231 | | |
| | | -321 | -3214 | | |
| | | | +3241 | | |
| | | | -3421 | | |
| | | | +4321 | | |

Lema 1) Quebra de Fila em Parcelas.

Se $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ são matrizes $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ tais que:

$$\begin{cases} \mathbf{linha}(\boldsymbol{i};\boldsymbol{A}) = \mathbf{linha}(\boldsymbol{i};\boldsymbol{B}) = \mathbf{linha}(\boldsymbol{i};\boldsymbol{C}) \quad , & \mathbf{se} \quad \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{i_0} \\ \mathbf{linha}(\boldsymbol{i};\boldsymbol{A}) = \mathbf{linha}(\boldsymbol{i};\boldsymbol{B}) + \mathbf{linha}(\boldsymbol{i};\boldsymbol{C}) \quad , & \mathbf{se} \quad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i_0} \end{cases}$$

ou (mutuamente excludente)

$$\begin{cases} \mathbf{coluna}(\boldsymbol{j};\boldsymbol{A}) = \mathbf{coluna}(\boldsymbol{j};\boldsymbol{B}) = \mathbf{coluna}(\boldsymbol{j};\boldsymbol{C}) \quad , & \mathbf{se} \quad \boldsymbol{j} \neq \boldsymbol{j_0} \\ \mathbf{coluna}(\boldsymbol{j};\boldsymbol{A}) = \mathbf{coluna}(\boldsymbol{j};\boldsymbol{B}) + \mathbf{coluna}(\boldsymbol{j};\boldsymbol{C}) \quad , & \mathbf{se} \quad \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j_0} \end{cases}$$

Então

$$\mathbf{det}\,\boldsymbol{A} = \mathbf{det}\,\boldsymbol{B} + \mathbf{det}\,\boldsymbol{C}$$

Intuição da demonstração (do Lema 1):

$$\det\begin{pmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 & x_3+y_3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{matrix} +(x_1+y_1)bf + (x_2+y_2)cd + (x_3+y_3)ae \\ -(x_1+y_1)ce - (x_2+y_2)af - (x_3+y_3)bd \end{matrix} =$$

$$= \begin{matrix} +x_1bf + x_2cd + x_3ae \\ -x_1ce - x_2af - x_3bd \end{matrix} + \begin{matrix} +y_1bf + y_2cd + y_3ae \\ -y_1ce - y_2af - y_3bd \end{matrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Ou seja

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 & x_3+y_3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \det A = \det B + \det C$$

Lema 2) Multiplicação de Fila por Escalar.

Seja $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$.Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são matrizes $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ tais que

$$\begin{cases} \mathbf{linha}(\boldsymbol{i};\boldsymbol{B}) = \quad \mathbf{linha}(\boldsymbol{i};\boldsymbol{A}) \quad , \qquad \mathbf{se} \quad \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{i_0} \\ \mathbf{linha}(\boldsymbol{i};\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{linha}(\boldsymbol{i};\boldsymbol{A}) \quad , \qquad \mathbf{se} \quad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i_0} \end{cases}$$

ou (mutuamente excludente)

$$\begin{cases} \mathbf{coluna}(\boldsymbol{j};\boldsymbol{B}) = \quad \mathbf{coluna}(\boldsymbol{j};\boldsymbol{A}) \quad , \qquad \mathbf{se} \quad \boldsymbol{j} \neq \boldsymbol{j_0} \\ \mathbf{coluna}(\boldsymbol{j};\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{coluna}(\boldsymbol{j};\boldsymbol{A}) \quad , \qquad \mathbf{se} \quad \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j_0} \end{cases}$$

então

$$\mathbf{det}\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{k}\,\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}$$

Intuição da demonstração do Lema 2:

$$\begin{vmatrix} a_1 & ka_2 & a_3 \\ b_1 & kb_2 & b_3 \\ c_1 & kc_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} +a_1kb_2c_3 + ka_2b_3c_1 + a_3b_1kc_2 \\ -a_1b_3kc_2 - ka_2b_1c_3 - a_3kb_2c_1 \end{matrix} =$$

$$= k(+a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1) =$$

$$= k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ex. do Lema 2:

Sabendo que

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-9} & \mathbf{7} \end{pmatrix} = \mathbf{11}$$

é imediato que

$$\underbrace{\mathbf{det}\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-9} & \mathbf{7} \end{pmatrix}}_{\mathbf{linha}(\mathbf{1};\boldsymbol{B})=\mathbf{3}\cdot\mathbf{linha}(\mathbf{1};\boldsymbol{A})} = \mathbf{33} \quad ; \quad \underbrace{\mathbf{det}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{7} \end{pmatrix}}_{\mathbf{coluna}(\mathbf{2};\boldsymbol{B})=-\,\mathbf{coluna}(\mathbf{2};\boldsymbol{A})} = \mathbf{-11} \quad ; \quad \mathbf{etc}\ldots$$

Aplicação do Lema 2: Colocar valores em evidência em uma fila

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-9} & \mathbf{7} \end{vmatrix} = \mathbf{3} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-9} & \mathbf{7} \end{vmatrix}$$

Pelo Lema 2 os papéis de “$\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$” são distribuídos como abaixo:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-9} & \mathbf{7} \end{vmatrix}}_{\boldsymbol{B}} = \mathbf{3} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-9} & \mathbf{7} \end{vmatrix}}_{\boldsymbol{A}}$$

Lema 3) Linhas iguais

Se em uma matriz $\boldsymbol{A}$ nós temos, para $\boldsymbol{i_1} \neq \boldsymbol{i_2}$:

$$\mathbf{linha}(\boldsymbol{i_1}; \boldsymbol{A}) = \mathbf{linha}(\boldsymbol{i_2}; \boldsymbol{A})$$

então

$$\mathbf{det}\, \boldsymbol{A} = \mathbf{0}$$

Ex. do Lema 3:

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{\pi} & \sqrt{\mathbf{2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{\pi} & \sqrt{\mathbf{2}} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

pois

$$\mathbf{linha}(\mathbf{1}; \boldsymbol{A}) = \mathbf{linha}(\mathbf{3}; \boldsymbol{A})$$

Intuição da demonstração do Lema 3:

Supondo a $\mathbf{linha}(\mathbf{1}; \boldsymbol{A}) = \mathbf{linha}(\mathbf{3}; \boldsymbol{A})$, ou seja, $\boldsymbol{a_j} = \boldsymbol{c_j}$...

(elementos de mesma cor são iguais entre si)

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{cases} +a_1b_2c_3d_4 & +a_3b_1c_2d_4 & -a_1b_2c_4d_3 & -a_3b_1c_4d_2 \\ +a_1b_3c_4d_2 & +a_3b_2c_4d_1 & -a_1b_3c_2d_4 & -a_3b_2c_1d_4 \\ +a_1b_4c_2d_3 & +a_3b_4c_1d_2 & -a_1b_4c_3d_2 & -a_3b_4c_2d_1 \\ +a_2b_1c_4d_3 & +a_4b_1c_3d_2 & -a_2b_1c_3d_4 & -a_4b_1c_2d_3 \\ +a_2b_3c_1d_4 & +a_4b_2c_1d_3 & -a_2b_3c_4d_1 & -a_4b_2c_3d_1 \\ +a_2b_4c_3d_1 & +a_4b_3c_2d_1 & -a_2b_4c_1d_3 & -a_4b_3c_1d_2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccccc} +a_1b_4c_2d_3 & +a_1b_2c_3d_4 & +a_1b_3c_4d_2 & +a_2b_4c_3d_1 & +a_2b_1c_4d_3 & +a_3b_2c_4d_1 \\ -a_2b_4c_1d_3 & -a_3b_2c_1d_4 & -a_4b_3c_1d_2 & -a_3b_4c_2d_1 & -a_4b_1c_2d_3 & -a_4b_2c_3d_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} +a_2b_3c_1d_4 & +a_3b_4c_1d_2 & +a_4b_2c_1d_3 & +a_3b_1c_2d_4 & +a_4b_3c_2d_1 & +a_4b_1c_3d_2 \\ -a_1b_3c_2d_4 & -a_1b_4c_3d_2 & -a_1b_2c_4d_3 & -a_2b_1c_3d_4 & -a_2b_3c_4d_1 & -a_3b_1c_4d_2 \end{array}$$

Corolário dos Lemas 2 e 3: Linhas proporcionais

Seja $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$. Se em uma matriz $\boldsymbol{A}$ nós temos, para $\boldsymbol{i_1} \neq \boldsymbol{i_2}$:

$$\mathbf{linha}(\boldsymbol{i_1}; \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{linha}(\boldsymbol{i_2}; \boldsymbol{A})$$

então

$$\mathbf{det}\, \boldsymbol{A} = \mathbf{0}$$

Intuição da demonstração do Corolário dos Lemas 2 e 3:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{ka} & \boldsymbol{kb} & \boldsymbol{kc} \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\textbf{Lema 2}} \boldsymbol{k} \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\textbf{Lema 3}} \boldsymbol{0}$$

Combinação Linear

Dados os vetores $\overrightarrow{\boldsymbol{v_1}}; \overrightarrow{\boldsymbol{v_2}}; \dots; \overrightarrow{\boldsymbol{v_n}}$
e os escalares reais $\boldsymbol{x_1}; \boldsymbol{x_2}; \dots; \boldsymbol{x_n}$ (coeficientes)
chamamos de COMBINAÇÃO LINEAR desses vetores
aquele (vetor) obtido do seguinte modo:

$$\boldsymbol{CL}(\overrightarrow{\boldsymbol{v_1}}; \overrightarrow{\boldsymbol{v_2}}; \dots; \overrightarrow{\boldsymbol{v_n}}) = \boldsymbol{x_1}\overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} + \boldsymbol{x_2}\overrightarrow{\boldsymbol{v_2}} + \cdots + \boldsymbol{x_n}\overrightarrow{\boldsymbol{v_n}}$$

Exemplo:

$$(\mathbf{7}; \mathbf{8}; \mathbf{9}) = \mathbf{2} \cdot (\mathbf{4}; \mathbf{5}; \mathbf{6}) - (\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3})$$

logo $(\mathbf{7}; \mathbf{8}; \mathbf{9})$ é COMBINAÇÃO LINEAR dos vetores $(\mathbf{4}; \mathbf{5}; \mathbf{6})$ e $(\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3})$,
com coeficientes respectivamente iguais a $\mathbf{2}$ e $-\mathbf{1}$

Teorema de Jacobi (para linhas)

$\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são matrizes tais que:

Para $\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{i_0}$ temos

$$\mathbf{linha}(\boldsymbol{i};\boldsymbol{B}) = \mathbf{linha}(\boldsymbol{i};\boldsymbol{A})$$

Para $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i_0}$ temos

$$\mathbf{linha}(\boldsymbol{i};\boldsymbol{B}) = \mathbf{linha}(\boldsymbol{i};\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{CL}(\mathbf{outras\ linhas\ de}\ \boldsymbol{A})$$

Sendo assim, então

$$\mathbf{det}\,\boldsymbol{B} = \mathbf{det}\,\boldsymbol{A}$$

Obs.: Essa combinação linear das outras linhas de $\boldsymbol{A}$ pode ser QUALQUER, ou seja, não importa quais sejam os coeficientes escolhidos.

Exemplo do Jacobi (para linhas):

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix} = \mathbf{det}\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6}\\ \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{10}\end{pmatrix}$$

pois

$$(\mathbf{8};\mathbf{9};\mathbf{10}) = (\mathbf{1};\mathbf{1};\mathbf{1}) + (\mathbf{7};\mathbf{8};\mathbf{9})$$

$$\underbrace{(\mathbf{8};\mathbf{9};\mathbf{10})}_{\mathbf{linha}(\mathbf{3};\boldsymbol{B})} = \underbrace{(\mathbf{1};\mathbf{1};\mathbf{1})}_{\mathbf{linha}(\mathbf{3};\boldsymbol{A})} \underbrace{-(\mathbf{1};\mathbf{2};\mathbf{3}) + \mathbf{2}\cdot(\mathbf{4};\mathbf{5};\mathbf{6})}_{\mathbf{CL}(\textbf{outras linhas de A})}$$

Intuição da demonstração (do Jacobi para linhas):

$$\Delta = \mathbf{det}\begin{pmatrix} a_1 + xb_1 + yc_1 & a_2 + xb_2 + yc_2 & a_3 + xb_3 + yc_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

pelo Lema 1 temos que

$$\Delta = \mathbf{det}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} + \mathbf{det}\begin{pmatrix} xb_1 & xb_2 & xb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} + \mathbf{det}\begin{pmatrix} yc_1 & yc_2 & yc_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

pelo Corolário dos Lemas 2 e 3 temos que

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} xb_1 & xb_2 & xb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \mathbf{det}\begin{pmatrix} yc_1 & yc_2 & yc_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = 0$$

logo

$$\Delta = \mathbf{det}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Aplicação do Jacobi: Escalonamento

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \underbrace{\equiv}_{}^{L_2'=L_2-4L_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \underbrace{\equiv}_{}^{L_3'=L_3+2L_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & 9 \end{vmatrix} \underbrace{\equiv}_{}^{L_3''=L_3'+\frac{5}{3}L_2'} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

(ITA-1971)

Qual o resto da divisão por $3$ do determinante

$$\begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-6} \\ (\mathbf{3}-\mathbf{4}) & (\mathbf{6}-\mathbf{1}) & (\mathbf{-3}-\mathbf{5}) & (\mathbf{9}+\mathbf{6}) \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{vmatrix}$$

a) $0$ b) $3$ c) $7$ d) $1$ e) n.d.r.a.

Solução (do exercício ITA-71):

$$\begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{(3-4)} & \mathbf{(6-1)} & \mathbf{(-3-5)} & \mathbf{(9+6)} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{vmatrix}}_{\mathbf{=0\ pelo\ Corolário}} + \begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{-5} & \mathbf{9} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{(3-4)} & \mathbf{(6-1)} & \mathbf{(-3-5)} & \mathbf{(9+6)} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{-5} & \mathbf{9} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{vmatrix}$$

As únicas duas parcelas que só vão pegar elementos não múltiplos de 3 serão:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{-5} & \mathbf{9} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{-5} & \mathbf{9} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

Todas as outras 22 parcelas terão algum elemento múltiplo de 3...

O produto $\mathbf{4} \cdot \mathbf{1} \cdot (-\mathbf{5}) \cdot \mathbf{5} = -\mathbf{100}$ vem de $-\boldsymbol{a_1 b_3 c_2 d_4}$, logo entra como $+\mathbf{100}$.

O produto $\mathbf{5} \cdot \mathbf{1} \cdot (-\mathbf{5}) \cdot \mathbf{5} = -\mathbf{125}$ vem de $+\boldsymbol{a_2 b_3 c_1 d_4}$, logo entra como $-\mathbf{125}$.

Como $\mathbf{100} - \mathbf{125} = -\mathbf{25}$ é congruente a $\mathbf{2}$ no módulo 3, então o determinante também será congruente a $\mathbf{2}$ no módulo 3.

ALTERNATIVA E

Obs.: $$\begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{(3-4)} & \mathbf{(6-1)} & \mathbf{(-3-5)} & \mathbf{(9+6)} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{vmatrix} = \mathbf{-250 = 3 \cdot (-84) + 2}$$

Determinante da Matriz Transposta

$$\mathbf{det}\,\boldsymbol{A^T} \equiv \mathbf{det}\,\boldsymbol{A}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = +a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = +\underbrace{a_1b_2c_3}_{123} + \underbrace{c_1a_2b_3}_{312} + \underbrace{b_1c_2a_3}_{231} - \underbrace{a_1c_2b_3}_{132} - \underbrace{b_1a_2c_3}_{213} - \underbrace{c_1b_2a_3}_{321}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{cases} +a_1b_2c_3d_4 & +a_3b_1c_2d_4 & -a_1b_2c_4d_3 & -a_3b_1c_4d_2 \\ +a_1b_3c_4d_2 & +a_3b_2c_4d_1 & -a_1b_3c_2d_4 & -a_3b_2c_1d_4 \\ +a_1b_4c_2d_3 & +a_3b_4c_1d_2 & -a_1b_4c_3d_2 & -a_3b_4c_2d_1 \\ +a_2b_1c_4d_3 & +a_4b_1c_3d_2 & -a_2b_1c_3d_4 & -a_4b_1c_2d_3 \\ +a_2b_3c_1d_4 & +a_4b_2c_1d_3 & -a_2b_3c_4d_1 & -a_4b_2c_3d_1 \\ +a_2b_4c_3d_1 & +a_4b_3c_2d_1 & -a_2b_4c_1d_3 & -a_4b_3c_1d_2 \end{cases}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{cases} +a_1b_2c_3d_4 & +b_1c_2a_3d_4 & -a_1b_2d_3c_4 & -b_1d_2a_3c_4 \\ +a_1d_2b_3c_4 & +d_1b_2a_3c_4 & -a_1c_2b_3d_4 & -c_1b_2a_3d_4 \\ +a_1c_2d_3b_4 & +c_1d_2a_3b_4 & -a_1d_2c_3b_4 & -d_1c_2a_3b_4 \\ +b_1a_2d_3c_4 & +b_1d_2c_3a_4 & -b_1a_2c_3d_4 & -b_1c_2d_3a_4 \\ +c_1a_2b_3d_4 & +c_1b_2d_3a_4 & -d_1a_2b_3c_4 & -d_1b_2c_3a_4 \\ +d_1a_2c_3b_4 & +d_1c_2b_3a_4 & -c_1a_2d_3b_4 & -c_1d_2b_3a_4 \end{cases}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{cases} +\underbrace{a_1b_2c_3d_4}_{1234} & +\underbrace{b_1c_2a_3d_4}_{2314} & -\underbrace{a_1b_2d_3c_4}_{1243} & -\underbrace{b_1d_2a_3c_4}_{2413} \\ +\underbrace{a_1d_2b_3c_4}_{1423} & +\underbrace{d_1b_2a_3c_4}_{4213} & -\underbrace{a_1c_2b_3d_4}_{1324} & -\underbrace{c_1b_2a_3d_4}_{3214} \\ +\underbrace{a_1c_2d_3b_4}_{1342} & +\underbrace{c_1d_2a_3b_4}_{3412} & -\underbrace{a_1d_2c_3b_4}_{1432} & -\underbrace{d_1c_2a_3b_4}_{4312} \\ +\underbrace{b_1a_2d_3c_4}_{2143} & +\underbrace{b_1d_2c_3a_4}_{2431} & -\underbrace{b_1a_2c_3d_4}_{2134} & -\underbrace{b_1c_2d_3a_4}_{2341} \\ +\underbrace{c_1a_2b_3d_4}_{3124} & +\underbrace{c_1b_2d_3a_4}_{3241} & -\underbrace{d_1a_2b_3c_4}_{4123} & -\underbrace{d_1b_2c_3a_4}_{4231} \\ +\underbrace{d_1a_2c_3b_4}_{4132} & +\underbrace{d_1c_2b_3a_4}_{4321} & -\underbrace{c_1a_2d_3b_4}_{3142} & -\underbrace{c_1d_2b_3a_4}_{3421} \end{cases}$$

Permutação Inversa:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{1}) = \mathbf{2} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{2}) = \mathbf{4} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{3}) = \mathbf{3} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{4}) = \mathbf{1} \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}^{-\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^{-\mathbf{1}}(\mathbf{1}) = \mathbf{4} \\ \boldsymbol{\sigma}^{-\mathbf{1}}(\mathbf{2}) = \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\sigma}^{-\mathbf{1}}(\mathbf{3}) = \mathbf{3} \\ \boldsymbol{\sigma}^{-\mathbf{1}}(\mathbf{4}) = \mathbf{2} \end{cases}$$

A permutação inversa sempre tem o mesmo sinal da permutação original!

Por isso

o Lema $3$,
o Corolário e
o Teorema de Jacobi,

que foram enunciados para LINHAS,

também funcionam para COLUNAS!

Espero que tenham gostado!

facebook.com/tiolinha

instagram.com/tiolinha

facebook.com/elitecuritiba

cursoelite.com.br