TRABALHANDO TRIGONOMETRIA E COMPLEXOS

Da trigonometria vamos lembrar que

$$sen(2\alpha) = 2.sen\,\alpha.\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

De onde podemos assimilar da seguinte forma

$$sen\,\theta = 2.sen\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\cos\theta = cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Assim temos que

$$1 + cis\,\theta = 1 + \cos\theta + isen\,\theta$$

Assim podemos ter

$$\cos\theta = cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \left(1 - cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 2cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$$

$$1 + \cos\theta = 2cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Logo

$$1 + cis\,\theta = \underbrace{1 + \cos\theta}_{2cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \quad i\,\underbrace{sen\,\theta}_{2sen\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad = 2cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2isen\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$1 + cis\,\theta = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + isen\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(cis\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$\boxed{1 + cis\,\theta = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(cis\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}$$

De forma análoga

$$1 - cis\,\theta = 1 - \cos\theta - isen\,\theta$$

Onde agora faremos

$$\cos\theta = cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - 2sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$1 - \cos\theta = 2sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Assim

$$1 - cis\,\theta = \underbrace{1 - \cos\theta}_{2sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \underbrace{i\,sen\,\theta}_{2sen\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 2isen\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$1 - cis\,\theta = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - icos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

Vamos multiplicar a equação por $(-i).i = 1$ e assim não se alterará

$$1 - cis\,\theta = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - icos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).(-i).i$$

$$1 - cis\,\theta = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)(-i).\left(\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - icos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).(i)$$

$$1 - cis\,\theta = -2i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right).\left(i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - i^2cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$1 - cis\,\theta = -2i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right).\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + isen\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$1 - cis\,\theta = -2i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right).\left(cis\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

Vamos calcular $sen\ (n\theta)$ e $\cos(n\theta)$ a partir da noção de binômio de Newton e da 1ª fórmula de Moovrie.

Sendo z um complexo de módulo unitário temos que $z = \cos\theta + isen\ \theta$

Assim vamos elevar ao cubo de um lado da igualdade por produtos notáveis e do outro lado da igualdade pela 1ª fórmula de Moovrie.

$$(\cos\theta + isen\ \theta)^3 = (\cos\theta + isen\ \theta)^3$$
$$\cos 3\theta + isen\ 3\theta = cos^3\theta + 3.cos^2\theta.isen\ \theta + 3.i^2.sen^2\theta.cos\ \theta + i^3.sen^3\theta$$
$$\cos 3\theta + isen\ 3\theta = cos^3\theta + 3icos^2\theta.sen\ \theta - 3sen^2\theta.\cos\theta - isen^3\theta$$
$$\cos 3\theta + isen\ 3\theta = (cos^3\theta - 3sen^2\theta.\cos\theta) + i(3cos^2\theta.sen\ \theta - sen^3\theta)$$
$$\begin{cases}\cos 3\theta = cos^3\theta - 3sen^2\theta.\cos\theta \\ sen\ 3\theta = 3cos^2\theta.sen\ \theta - sen^3\theta\end{cases}$$

$$\cos 3\theta = cos^3\theta - 3sen^2\theta.\cos\theta = \cos\theta\ (cos^2\theta - 3sen^2\theta)$$
$$\cos 3\theta = \cos\theta\ (1 - sen^2\theta - 3sen^2\theta) = \cos\theta\ (1 - 4sen^2\theta)$$

$$sen\ 3\theta = 3cos^2\theta.sen\ \theta - sen^3\theta = sen\ \theta(3cos^2\theta - sen^2\theta)$$
$$sen\ 3\theta = \ sen\ \theta\big(3cos^2\theta - (1 - cos^2\theta)\big) = sen\ \theta(4cos^2\theta - 1)$$

RAÍZES N-ÉSIMAS DA UNIDADE

Ao fazermos $z^n - 1 = 0$ estamos encontrando todas as raízes complexas da unidade.

$$z^n - 1 = 0 \Rightarrow z^n = 1 \Rightarrow z^n = cis\ (0 + 2k\pi) \Rightarrow z = cis\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Assim para $k = 0, 1, , \dots, (n-1)$ teremos as raízes
$\left\{1, cis\left(\frac{2\pi}{n}\right), cis\left(\frac{4\pi}{n}\right), \dots, cis\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right\}$.

Como sabemos essas raízes n-ésimas formam um polígono regular de n lados no plano de Argand-Gauss.

Da fatoração de polinômios temos

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

Onde $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ são as raízes de $P(x)$ e onde a é o coeficiente do monômio de maior grau.

De forma análoga teremos

$$z^n - 1 = (z - 1)\left(z - cis\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\left(z - cis\left(\frac{4\pi}{n}\right)\right). \dots . \left(z - cis\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right) \ (I)$$

Já que vimos que $\left\{1, cis\left(\frac{2\pi}{n}\right), cis\left(\frac{4\pi}{n}\right), \dots, cis\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right\}$ são as raízes de $z^n - 1$.

Da soma dos termos de uma P.G. finita temos

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1.(z^n - 1)}{z - 1} \Longrightarrow (z^n - 1) = (z - 1)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}) \ (II)$$

Por assimilação de (I) e (II) teremos

$$\left(z - cis\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\left(z - cis\left(\frac{4\pi}{n}\right)\right). \dots . \left(z - cis\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right) = (1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1})$$

Temos então as raízes da unidade $\{1, w, w^2, \dots, w^{n-1}\}$, assim

$$\boxed{(z - w).(z - w^2). \dots .(z - w^{n-1}) = (1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1})}$$

E das relações de Girard para $z^n - 1$ temos que a soma das raízes do polinômio tem de ser igual a 0, assim

$$\boxed{1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1} = 0}$$

EXERCÍCIOS

1. Mostre que $Re\left(\frac{|z|-iz}{|z|+iz}\right) = 0$, para qualquer z complexo.

2. (ITA) Mostre que para todo z complexo de módulo unitário vale:

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = i.ctg\left(\frac{\arg(z)}{2}\right)$$

3. (ITA) Se $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ é o argumento de um número complexo z, não nulo, e n é um número natural tal que $\left(\frac{z}{|z|}\right)^n = i.sen(n\alpha)$ então mostre que $2n\alpha - \pi$ é múltiplo de 2π.

4. Seja no plano cartesiano o quadrado ABCD de vértices $A\ (1,\ -1)$ e $C\ (3,\ 5)$. Encontre as coordenadas do vértice B.

5. Seja no plano cartesiano o hexágono regular ABCDEF de vértices $A\ (2,\ 1)$ e $B(3,\ 3)$. Encontre as coordenadas do vértice E.

PROFESSOR RODRIGO MENEZES