1. (Ita 2020) A expansão decimal do número $100! = 100 \cdot 99 \cdots 2 \cdot 1$ possui muitos algarismos iguais a zero. Contando da direita para a esquerda, a partir do dígito das unidades, o número de zeros, que esse número possui antes de um dígito não nulo aparecer, é igual a
a) 20.
b) 21.
c) 22.
d) 23.
e) 24.

2. (Efomm 2020) Assinale a alternativa que apresenta o termo independente de x na expansão binomial $\left(x^2 + \frac{1}{x^6}\right)^8$.
a) 1
b) 8
c) 28
d) 56
e) 70

3. (Uece 2019) O número inteiro n, maior do que 3, para o qual os números $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}$ e $\binom{n}{3}$ estão, nessa ordem, em progressão aritmética é

Observação: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
a) $n = 6$.
b) $n = 8$.
c) $n = 5$.
d) $n = 7$.

4. (Ita 2018) Sejam a e b números inteiros positivos. Se a e b são, nessa ordem, termos consecutivos
de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e o termo independente de $\left(ax - \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é igual a 7.920, então $a + b$ é
a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

5. (Epcar (Afa) 2018) O menor dos possíveis coeficientes do termo em x^8, no desenvolvimento de $(2 + x^2 + 3x^3)^{10}$ é igual a
a) 11.240
b) 12.420
c) 13.440
d) 14.720

6. (Espcex (Aman) 2018) Determine o valor numérico do polinômio $p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2017$ para $x = 89$.
a) 53 213 009.

b) 57 138 236.
c) 61 342 008.
d) 65 612 016.
e) 67 302 100.

7. (Ime 2017) No desenvolvimento de $\left(x \cdot \text{sen } 2\beta + \frac{1}{x}\cos 2\beta\right)^{10}$ o valor do termo independente de x é igual a $63/256$. Considerando que β é um número real, com $0 < \beta < \pi/8$ e $x \neq 0$, o valor de β é:
a) $\pi/9$
b) $\pi/12$
c) $\pi/16$
d) $\pi/18$
e) $\pi/24$

8. (Espcex (Aman) 2017) Determine o algarismo das unidades da seguinte soma $S = \sum_{n=1}^{2016} n!$, em que $n!$ é o fatorial do número natural n.
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

9. (Fgv 2017) O coeficiente de x^{12} na expansão de $(1 + x^4 + x^5)^{10}$ é igual a
a) 120.
b) 90.
c) 81.
d) 60.
e) 54.

10. (Uece 2017) O coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^3$ é
a) 18.
b) 24.
c) 34.
d) 30.

11. (Espcex (Aman) 2017) O valor da expressão
$E = (999)^5 + 5 \cdot (999)^4 + 10 \cdot (999)^3 + 10 \cdot (999)^2 + 5 \cdot (999) + 1$ é igual a
a) $9 \cdot 10^3$
b) $9 \cdot 10^{15}$
c) 10^{15}
d) 999.999
e) $999 \cdot 10^{15}$

12. (Esc. Naval 2017) Se $a = \sqrt{3 + \sqrt{2}}$ e $b = \sqrt{3 - \sqrt{2}}$, seja k o determinante da matriz

$\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{bmatrix}$, sendo assim, é correto afirmar que o coeficiente de x^{k-1} no desenvolvimento $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^3 \cdot \left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^3$ é

a) 21
b) 22
c) 23
d) 24
e) 25

13. (Esc. Naval 2016) O par ordenado (x, y) de números reais, $x \neq 0$ e $y \neq 0$, satisfaz ao sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4} \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{16} \end{cases}$$

em que x é o menor elemento do par. Se $p = 3x + y$, encontre o termo de ordem $(p+1)$ do binômio $\left(\frac{x^2z}{\sqrt[5]{143}}-y^2\right)^{15}$ e assinale a opção correta.

a) $-21x^{10}z^5y^{20}$
b) $21x^5z^{10}y^{20}$
c) $-21x^{10}z^5y^{10}$
d) $21x^{32}z^{10}y^{20}$
e) $21x^{10}z^5y^{20}$

14. (Espcex (Aman) 2016) A solução da equação $\frac{3!(x-1)!}{4(x-3)!}=\frac{182(x-2)!-x!}{2(x-2)!}$ é um número natural

a) maior que nove.
b) ímpar.
c) cubo perfeito.
d) divisível por cinco.
e) múltiplo de três.

15. (Uece 2016) Se n é um número natural maior do que dois, ao ordenarmos o desenvolvimento de $\left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^n$ segundo as potências decrescentes de x, verificamos que os coeficientes dos três primeiros termos estão em progressão aritmética. Nessas condições, o valor de n é

a) 8.
b) 6.
c) 4.
d) 10.

16. (Fgvrj 2016) Um grupo de oito alunos está sendo liderado em um passeio por dois professores e, em determinado momento, deve se dividir em dois subgrupos. Cada professor irá liderar um dos subgrupos e cada aluno deverá escolher um professor.
A única restrição é que cada subgrupo deve ter no mínimo um aluno.
O número de maneiras distintas de essa subdivisão ser feita é
a) 128.
b) 64.
c) 248.
d) 254.
e) 256.

17. (Upf 2016) Desenvolvendo o binômio $(2x-3y)^{3n}$, obtém-se um polinômio de 16 termos. O valor de n é:
a) 15
b) 10
c) 5
d) 4
e) 2

18. (Ime 2016) O valor da soma abaixo é:

$$\binom{2016}{5}+\binom{2017}{5}+\binom{2018}{5}+\binom{2019}{5}+\binom{2020}{5}+\binom{2016}{6}$$

a) $\binom{2020}{6}$
b) $\binom{2020}{7}$
c) $\binom{2021}{5}$
d) $\binom{2021}{6}$
e) $\binom{2022}{5}$

19. (Uece 2015) As soluções, em $\mathbb{R}$, da equação $\cos^4 x - 4\cos^3 x + 6\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$ são

Sugestão: use o desenvolvimento do binômio $(p-q)^4$.
a) $x = 2k\pi$, onde k é um inteiro qualquer.
b) $x = (2k+1)\pi$, onde k é um inteiro qualquer.
c) $x = k\pi$, onde k é um inteiro qualquer.
d) $x = (4k+1)\pi$, onde k é um inteiro qualquer.

20. (Ita 2014) Para os inteiros positivos k e n, com $k \leq n$, sabe-se que $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Então, o valor de $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$ é igual a

a) $2^n + 1$.
b) $2^{n+1} + 1$.
c) $\frac{2^{n+1}+1}{n}$.
d) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.
e) $\frac{2^n - 1}{n}$.

21. (Ufrgs 2014) Considere a configuração dos números dispostos nas colunas e linhas abaixo.

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	Coluna 6	Coluna 7	...
Linha 0	1								
Linha 1	1	1							
Linha 2	1	2	1						
Linha 3	1	3	3	1					
Linha 4	1	4	6	4	1				
Linha 5	1	5	10	10	5	1			
Linha 6	1	6	15	20	15	6	1		
Linha 7	1	7	21	35	35	21	7	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	

O número localizado na linha 15 e na coluna 13 é
a) 15.
b) 91.
c) 105.
d) 120.
e) 455.

22. (Ita 2013) O coeficiente de x^4y^4 no desenvolvimento de $(1+x+y)^{10}$ é
a) 3150
b) 6300
c) 75600
d) 81900
e) 151200

23. (Esc. Naval 2012) Seja m a menor raiz inteira da equação $\left[\dfrac{(x-1)(5x-7)}{3}\right]! = 1$. Pode-se afirmar que o termo médio do desenvolvimento de $(\sqrt{y} - z^3)^{12m}$ é

a) $\dfrac{12!}{6!6!} y^{18} z^{\frac{3}{2}}$

b) $\dfrac{-12!}{6!6!} y^3 z^{18}$

c) $\dfrac{30!}{15!15!} y^{\frac{15}{2}} z^{45}$

d) $\dfrac{-30!}{15!15!} y^{\frac{15}{2}} z^{45}$

e) $\dfrac{12!}{6!6!} y^3 z^{18}$

24. (Ita 2010) A expressão $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^5 - (2\sqrt{3} - \sqrt{5})^5$ é igual a

a) $2630\sqrt{5}$.
b) $2690\sqrt{5}$.
c) $2712\sqrt{5}$.
d) $1584\sqrt{15}$.
e) $1604\sqrt{15}$.

Gabarito:

Resposta da questão 1:
[E]

Note que, toda vez que aparecer $5 \cdot 2,$ aparecerá um 0 (zero).

O fator 5 aparece nos seguintes números:
$\underbrace{5, 10, 15, 20, 25, ..., 100}_{20 \text{ números}}$

Note que:
$25 = 5 \cdot 5$
$50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$
$75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$
$100 = 4 \cdot 5 \cdot 5$

Então, o fator 5 aparece $20 + 4 = 24$ vezes.

Há mais fatores 2 do que fatores $5,$ logo, nas 24 vezes em que o 5 aparece, é possível fazer aparecer o fator $10,$ gerando um 0 (zero).

Portanto, $100!$ possui, contados da direita para a esquerda, 24 zeros, antes de um dígito não nulo aparecer.

Resposta da questão 2:
[C]

O termo geral de $\left(x^2 + \frac{1}{x^6}\right)^8$ é dado por:

$\binom{8}{p} \cdot \left(x^2\right)^p \cdot \left(x^{-6}\right)^{8-p}$

$\binom{8}{p} \cdot x^{2p} \cdot x^{-48+6p}$

$\binom{8}{p} \cdot x^{8p-48}$

Fazendo $8p - 48 = 0,$
$p = 6$

Daí, o termo independente de x na expansão binomial $\left(x^2 + \frac{1}{x^6}\right)^8$ é:

$\binom{8}{6} = \frac{8!}{6! \cdot 2!}$

$\binom{8}{6} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 2 \cdot 1}$

$\binom{8}{6} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 2 \cdot 1}$

$\binom{8}{6} = 28$

Resposta da questão 3:
[D]

Do enunciado,

$$\frac{\binom{n}{1}+\binom{n}{3}}{2}=\binom{n}{2}$$

$$n+\frac{n!}{3!\cdot(n-3)!}=2\cdot\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}$$

$$n+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}=n\cdot(n-1)$$

$$6n+n\cdot\left(n^2-3n+2\right)=6n\cdot(n-1)$$

$$n\cdot\left(6+n^2-3n+2\right)=6n\cdot(n-1)$$

$$6+n^2-3n+2=6n-6$$

$$n^2-9n+14=0$$

$$n=2 \text{ ou } n=7$$

Como $n>3,$

$$n=7$$

Resposta da questão 4:
[B]

Do enunciado,
$a=2b$

O termo geral de $\left(ax-\frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é:

$$\binom{12}{p}\cdot(ax)^{12-p}\cdot\left(-\frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{p}$$

$$\binom{12}{p}\cdot a^{12-p}\cdot x^{12-p}\cdot\frac{(-b)^p}{x^{\frac{p}{2}}}$$

$$\binom{12}{p}\cdot a^{12-p}\cdot(-b)^p\cdot x^{\frac{24-3p}{2}}$$

O termo independente de $\left(ax-\frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é obtido tomando-se $\frac{24-3p}{2}=0,$ ou seja, $p=8.$

Daí,

$$7920=\binom{12}{8}\cdot a^4\cdot(-b)^8$$

$$7920=495\cdot a^4\cdot b^8$$

Mas, $a=2b,$ logo,

$16 = (2b)^4 \cdot b^8$

$16 = 2^4 \cdot b^4 \cdot b^8$

$b^{12} = 1$

Como b é positivo,
$b = 1$

De $a = 2b$ e $b = 1,$
$a = 2$

Assim,
$a + b = 3$

Resposta da questão 5:
[C]

Pelo Teorema Multinomial, temos

$$\begin{aligned}(2 + x^2 + 3x^3)^{10} &= \sum \frac{10!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \alpha_3!} \cdot 2^{\alpha_1} \cdot (x^2)^{\alpha_2} \cdot (3x^3)^{\alpha_3} \\ &= \sum \frac{10!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \alpha_3!} \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot x^{2\alpha_2 + 3\alpha_3}.\end{aligned}$$

Logo, queremos encontrar os valores de α_1, α_2 e α_3 que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 10 \\ 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 8 \end{cases}.$$

Vejamos a tabela abaixo com as possíveis soluções e o respectivo termo T.

α_1	α_2	α_3	T
6	4	0	$13440x^8$
7	1	2	$414720x^8$

A resposta é $13440.$

Resposta da questão 6:
[D]

$p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2017$

$p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 + 2016$

$p(x) = \binom{4}{0} x^4 \cdot 1^0 + \binom{4}{1} x^3 \cdot 1^1 + \binom{4}{2} x^2 \cdot 1^2 + \binom{4}{3} x^1 \cdot 1^3 + \binom{4}{4} x^0 \cdot 1^4 + 2016$

$p(x) = (x + 1)^4 + 2016$

$p(89) = (89 + 1)^4 + 2016$

$p(89) = 90^4 + 2016$

$p(89) = 65610000 + 2016$

$p(89) = 65612016$

Resposta da questão 7:
[E]

Utilizando o Binômio de Newton:

$$\left(x\cdot \text{sen }2\beta+\frac{1}{x}\cos 2\beta\right)^{10}=\binom{10}{p}\cdot\left(x\cdot \text{sen }2\beta\right)^{10-p}\cdot\left(\frac{1}{x}\cos 2\beta\right)^{p}$$

Como x está multiplicando no primeiro termo e dividindo no segundo, para obter o termo independente é necessário que os expoentes de x sejam iguais. Ou seja:

$10-p=p\rightarrow p=5$

$$T_{\text{independente}}=\binom{10}{5}\cdot\left(x\cdot \text{sen }2\beta\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{x}\cos 2\beta\right)^{5}$$

$$\binom{10}{5}\cdot\left(\text{sen }2\beta\right)^{5}\cdot\left(\cos 2\beta\right)^{5}=\frac{63}{256}\rightarrow\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 5!}\cdot\left(\text{sen }2\beta\cdot\cos 2\beta\right)^{5}=\frac{7\cdot 9}{2^3\cdot 2^5}$$

$$\left(\text{sen }2\beta\cdot\cos 2\beta\right)^{5}\cdot 2^5=\frac{1}{32}\rightarrow\left(2\,\text{sen }2\beta\cdot\cos 2\beta\right)^{5}=\frac{1}{32}\rightarrow\left(\text{sen }4\beta\right)^{5}=\frac{1}{2^5}$$

$$\text{sen }4\beta=\frac{1}{2}\rightarrow 0<\beta<{}^{\pi}\!/_{8}\rightarrow 4\beta=\frac{\pi}{6}\rightarrow\beta=\frac{\pi}{24}$$

Resposta da questão 8:
[D]

$$S=\sum_{n=1}^{2016} n!=1+2+6+24+120+720+\ldots$$

O último algarismo da soma acima é igual ao último algarismo da soma:
$1+2+6+24=33,$ já que a partir do fatorial de cinco todos os últimos algarismos valem zero.

Portanto, o último algarismo da soma pedida é $3.$

Resposta da questão 9:
[A]

Sendo α_1, α_2 e α_3 números naturais, temos

$$\begin{aligned}(1+x^4+x^5)^{10}&=\sum\frac{10!}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdot\alpha_3!}\cdot 1^{\alpha_1}\cdot(x^4)^{\alpha_2}\cdot(x^5)^{\alpha_3}\\&=\sum\frac{10!}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdot\alpha_3!}\cdot x^{4\alpha_2+5\alpha_3}.\end{aligned}$$

A fim de calcularmos o coeficiente de $x^{12},$ devemos resolver o sistema

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=10\\4\alpha_2+5\alpha_3=12\end{cases}.$$

Portanto, como tal sistema possui solução única $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=(7, 3, 0),$ segue que a resposta é

$$\frac{10!}{7!\cdot 3!\cdot 0!}=120.$$

Resposta da questão 10:
[B]

Sendo

$$T_{p+1} = \binom{3}{p} \cdot (2x)^{3-p} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^p = \binom{3}{p} \cdot 2^{3-p} \cdot x^{3-3p},$$

o termo geral de $\left(2x + \dfrac{1}{x^2}\right)^3$, e

$$T_{q+1} = \binom{3}{q} \cdot (x^2)^{3-q} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^q = \binom{3}{q} \cdot 2^{-q} \cdot x^{6-3q},$$

o termo geral de $\left(x^2 + \dfrac{1}{2x}\right)^3$, e

$$T_{p+1} \cdot T_{q+1} = \binom{3}{p} \cdot \binom{3}{q} \cdot 2^{3-(p+q)} \cdot x^{9-3(p+q)}.$$

Logo, deve-se ter $p + q = 1$, o que implica em $(p, q) = (0, 1)$ ou $(p, q) = (1, 0)$. Em consequência, a resposta é

$$\binom{3}{0} \cdot \binom{3}{1} \cdot 2^2 + \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{0} \cdot 2^2 = 24.$$

Resposta da questão 11:
[C]

$$E = (999)^5 + 5 \cdot (999)^4 + 10 \cdot (999)^3 + 10 \cdot (999)^2 + 5 \cdot (999) + 1 = (1 + 999)^5 = 1000^5 =$$
$$\left(10^3\right)^5 = 10^{15}$$

Resposta da questão 12:
[D]

Do enunciado,

$$k = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

$$k = -\begin{vmatrix} 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

$$k = -\begin{vmatrix} 1-(1-a)\cdot(1+a) & 1-(1+a)\cdot 1 & 1-(1+a)\cdot 1 \\ 1-1\cdot(1-a) & (1+b)-1\cdot 1 & 1-1\cdot 1 \\ 1-1\cdot(1-a) & 1-1\cdot 1 & (1-b)-1\cdot 1 \end{vmatrix}$$

$$k = -\begin{vmatrix} 1-\left(1^2-a^2\right) & 1-1-a & 1-1-a \\ 1-1+a & 1+b-1 & 1-1 \\ 1-1+a & 1-1 & 1-b-1 \end{vmatrix}$$

$$k = -\begin{vmatrix} a^2 & -a & -a \\ a & b & 0 \\ a & 0 & -b \end{vmatrix}$$

$$k = -a \cdot \begin{vmatrix} a & -a & -a \\ 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix}$$

$$k = -a \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix}$$

$$k = -a^2 \cdot \begin{vmatrix} b-1\cdot(-1) & 0-1\cdot(-1) \\ 0-1\cdot(-1) & -b-1\cdot(-1) \end{vmatrix}$$

$$k = -a^2 \cdot \begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

$$k = -a^2 \cdot \left((1+b)\cdot(1-b) - 1\cdot 1\right)$$

$$k = -a^2 \cdot \left(1^2 - b^2 - 1\right)$$

$$k = -a^2 + a^2b^2 + a^2$$

$$k = (ab)^2$$

Então,

$$k = \left(\sqrt{3+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{2}}\right)^2$$

$$k = \sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)}^2$$

$$k = 3^2 - \sqrt{2}^2$$

$$k = 9 - 2$$

$$k = 7$$

De $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^3$,

$$\left(\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(x^2+\frac{1}{2x}\right)\right)^3$$
$$\left(2x\cdot x^2+2x\cdot\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2}\cdot x^2+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{2x}\right)^3$$
$$\left(2x^3+1+1+\frac{1}{2x^3}\right)^3$$
$$\left(2x^3+2+\frac{1}{2x^3}\right)^3$$
$$\left(\frac{4x^6+4x^3+1}{2x^3}\right)^3$$
$$\frac{\left(\left(2x^3+1\right)^2\right)^3}{2^3\cdot x^9}$$
$$\frac{1}{2^3\cdot x^9}\cdot\left(2x^3+1\right)^6$$

O termo geral de $\left(2x^3+1\right)^6$ é $\binom{6}{p}\cdot 2^{6-p}\cdot x^{18-3p}$.

Assim, o termo geral do desenvolvimento de $\frac{1}{2^3\cdot x^9}\cdot\left(2x^3+1\right)^6$ é:

$$\binom{6}{p}\cdot 2^{6-p}\cdot x^{18-3p}\cdot\frac{1}{2^3\cdot x^9}$$
$$\binom{6}{p}\cdot 2^{3-p}\cdot x^{9-3p}$$

Como $k=7$, queremos o coeficiente de x^6, logo,
$9-3p=6$
$3p=3$
$p=1$

Dessa forma, o coeficiente procurado é:
$$\binom{6}{1}\cdot 2^{3-1}=\frac{6!}{1!\cdot(6-1)!}\cdot 2^2$$
$$\binom{6}{1}\cdot 2^{3-1}=6\cdot 4$$
$$\binom{6}{1}\cdot 2^{3-1}=24$$

Resposta da questão 13:
[E]

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4} \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{16} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}=\frac{9}{16} \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{16} \end{cases} \rightarrow \frac{2}{xy}=\frac{9}{16}-\frac{5}{16} \rightarrow \frac{2}{xy}=\frac{4}{16} \rightarrow xy=8$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4} \\ xy=8 \end{cases} \rightarrow \frac{x+y}{8}=\frac{3}{4} \rightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ xy=8 \end{cases} \rightarrow \left\langle \begin{matrix} x=2 \\ y=4 \end{matrix} \right.$$

$$p=3x+y \rightarrow p=3\cdot 2+4 \rightarrow p=10$$

$$T_{p+1}=T_{11}=\binom{15}{10}\left(\frac{x^2z}{\sqrt[5]{143}}\right)^{15-10}\cdot\left(-y^2\right)^{10}=21x^{10}z^5y^{20}$$

Resposta da questão 14:
[C]

$$\frac{3!\cdot(x-1)!}{4\cdot(x-3)!}=\frac{182\cdot(x-2)!-x!}{2\cdot(x-2)!} \Rightarrow \frac{3!\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{4}=\frac{182-x(x-1)}{2} \Rightarrow 6(x-1)(x-2)=364-2x^2+2x$$

$$\Rightarrow 8x^2-20x-352=0 \Rightarrow 8x^2-5x-88=0$$

$$x=\frac{5\pm 27}{2} \Rightarrow x=8 \text{ ou } x=-11/2 \text{ (não convém)}$$

Portanto, 8 é um cubo perfeito.

Resposta da questão 15:
[A]

O termo geral do desenvolvimento de $\left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^n$, segundo as potências decrescentes de x, é

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}\cdot(x^2)^{n-k}\cdot\left(\frac{1}{2x}\right)^k=\frac{1}{2^k}\cdot\binom{n}{k}\cdot x^{2n-3k}.$$

Assim, os coeficientes dos três primeiros termos são: 1, $\frac{n}{2}$ e $\frac{n\cdot(n-1)}{8}$.

Portanto, segue que

$$2\cdot\frac{n}{2}=1+\frac{n\cdot(n-1)}{8} \Leftrightarrow n^2-9n+8=0 \Rightarrow n=8.$$

Resposta da questão 16:
[D]

Considerando dois grupos A e B.
Portanto, o número de maneiras de se formar os grupos A ou B será dado por:

$$\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{6}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}=2^8-\binom{8}{0}-\binom{8}{8}=256-1-1=254$$

Portanto, o número de maneiras de se realizar a divisão pedida será dada por 254.

Resposta da questão 17:

[C]

$(2x - 3y)^{3n}$ possui 16 termos, então: $3n + 1 = 16 \Rightarrow n = 5$

Resposta da questão 18:
[D]

Utilizando a Relação de Stifel, pode-se escrever:

Relação de Stifel $\rightarrow \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

$$\binom{2016}{5} + \binom{2017}{5} + \binom{2018}{5} + \binom{2019}{5} + \binom{2020}{5} + \binom{2016}{6} =$$
$$\binom{2016}{5} + \binom{2016}{6} + \binom{2017}{5} + \binom{2018}{5} + \binom{2019}{5} + \binom{2020}{5} =$$
$$\binom{2017}{6} + \binom{2017}{5} + \binom{2018}{5} + \binom{2019}{5} + \binom{2020}{5} =$$
$$\binom{2018}{6} + \binom{2018}{5} + \binom{2019}{5} + \binom{2020}{5} = \binom{2019}{6} + \binom{2019}{5} + \binom{2020}{5} = \binom{2020}{6} + \binom{2020}{5} = \binom{2021}{6}$$

Resposta da questão 19:
[A]

Substituindo $\cos x$ por a, tem-se:
$a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1 = 0$, o qual é o polinômio resultante de
$(a-1)^4 = (a-1) \cdot (a-1) \cdot (a-1) \cdot (a-1) = 0$

Assim, percebe-se facilmente que a raiz de tal polinômio é 1. Ou seja,
$\cos x = 1$
$x = 360° = 2\pi$

Como a função cosseno é periódica, podemos dizer que a cada $360°$ tem-se uma nova raiz da função, ou seja, a cada $2k\pi$, onde k é um inteiro qualquer.

Resposta da questão 20:
[D]

$$\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=$$

$$\frac{\frac{n+1}{1}\binom{n}{0}+\frac{n+1}{2}\binom{n}{1}+\frac{n+1}{3}\binom{n}{2}+\ldots+\frac{n+1}{n}\binom{n}{n}}{n+1}=$$

$$=\frac{\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}+\ldots+\binom{n+1}{n+1}}{n+1}=$$

$$=\frac{2^{n+1}-\binom{n+1}{0}}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Resposta da questão 21:
[C]

A tabela acima é o famoso triângulo de Pascal.
$$\binom{15}{13}=\frac{15!}{2!\cdot 13!}=\frac{15\cdot 14}{2}=105$$

Resposta da questão 22:
[A]

O termo de y^4 no desenvolvimento de $((1+x)+y)^{10}$ é $\binom{10}{4}(1+x)^6\cdot y^4$

O termo de x^4 no desenvolvimento de $(1+x)^6$ é $\binom{10}{4}1^6\cdot x^4$

Portanto, o coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $(1+x+y)^{10}$ é
$\binom{10}{4}\cdot\binom{6}{4}=210\cdot 15=3150.$

Resposta da questão 23:
[E]

Sabendo que $0!=1$ e $1!=1,$ vem

$$\frac{(x-1)(5x-7)}{3}=0\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=\frac{7}{5}$$

ou

$$\frac{(x-1)(5x-7)}{3}=1\Leftrightarrow 5x^2-12x+4=0$$
$$\Leftrightarrow x=2 \text{ ou } x=\frac{2}{5}.$$

Donde concluímos que $m=1.$

Assim, como o termo geral de $(\sqrt{y}-z^3)^{12}$ é

$$\binom{12}{p}(\sqrt{y})^p(-z^3)^{12-p}=(-1)^{12-p}\binom{12}{p}y^{\frac{p}{2}}z^{36-3p},$$

e o termo médio é tal que

$$p+1=\frac{12}{2}+1 \Leftrightarrow p=6,$$

concluímos que o termo médio é igual a

$$(-1)^{12-6}\binom{12}{6}y^{\frac{6}{2}}z^{36-3\cdot 6}=\frac{12!}{6!6!}y^3z^{18}.$$

Resposta da questão 24:
[B]

Utilizando o Binômio de Newton, temos

$(a + b)^5 = a^5 + 5.a^4.b+10.a^3.b^2 + 10.a^2.b^2 + 5.a.b^4 + b^5$
$(a - b)^5 = a^5 - 5.a^4.b + 10.a^3.b^2 - 10.a^2.b^2 + 5.a.b^4 - b^5$
$(a + b)^5 - (a - b)^5 = 10a^4.b + 20.a^2.b^3 + 2b^5$

Logo:

$$\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^5-\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^5=10.(2\sqrt{3})^4.\sqrt{5}+20.(2\sqrt{3})^2.\sqrt{5}^3+2.\sqrt{5}^5$$
$$\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^5-\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^5=1440\sqrt{5}+1200\sqrt{5}+50\sqrt{5}$$
$$\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^5-\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^5=2690\sqrt{5}$$

Resumo das questões selecionadas nesta atividade

Data de elaboração: 21/08/2020 às 21:59
Nome do arquivo: Teorema Binomial vestibulares

Legenda:
Q/Prova = número da questão na prova
Q/DB = número da questão no banco de dados do SuperPro®

Q/prova	Q/DB	Grau/Dif.	Matéria	Fonte	Tipo
1	193565	Média	Matemática	Ita/2020	Múltipla escolha
2	190746	Média	Matemática	Efomm/2020	Múltipla escolha
3	188315	Média	Matemática	Uece/2019	Múltipla escolha
4	176292	Média	Matemática	Ita/2018	Múltipla escolha
5	172844	Média	Matemática	Epcar (Afa)/2018	Múltipla escolha
6	174129	Média	Matemática	Espcex (Aman)/2018	Múltipla escolha
7	164250	Elevada	Matemática	Ime/2017	Múltipla escolha
8	163493	Média	Matemática	Espcex (Aman)/2017	Múltipla escolha
9	167515	Média	Matemática	Fgv/2017	Múltipla escolha
10	169113	Média	Matemática	Uece/2017	Múltipla escolha
11	163492	Média	Matemática	Espcex (Aman)/2017	Múltipla escolha
12	172437	Elevada	Matemática	Esc. Naval/2017	Múltipla escolha
13	163319	Elevada	Matemática	Esc. Naval/2016	Múltipla escolha
14	148617	Média	Matemática	Espcex (Aman)/2016	Múltipla escolha
15	153974	Média	Matemática	Uece/2016	Múltipla escolha
16	148847	Média	Matemática	Fgvrj/2016	Múltipla escolha
17	150844	Média	Matemática	Upf/2016	Múltipla escolha
18	149084	Elevada	Matemática	Ime/2016	Múltipla escolha
19	141828	Média	Matemática	Uece/2015	Múltipla escolha
20	129792	Elevada	Matemática	Ita/2014	Múltipla escolha
21	133405	Média	Matemática	Ufrgs/2014	Múltipla escolha
22	124249	Elevada	Matemática	Ita/2013	Múltipla escolha
23	127797	Média	Matemática	Esc. Naval/2012	Múltipla escolha