Aulão Brasil
Turma
IME/ITA
06jun20

Prof Carlos Vinícius Ramos da Silva

NÚMEROS COMPLEXOS COM GEOMETRIA ANALÍTICA

REFERENCIAL TEÓRICO

Corpo dos Reais ($\mathbb{R}$)

($\mathbb{R}^2$, +, *) é um Espaço vetorial Real de dimensão dois.
$\mathbb{R}^2$ munidos com essas operações é um Corpo.
É nesse espaço que temos o plano cartesiano e tratamos dos pontos e vetores.
$P = (a, b)\ \vec{v} = (a.b)$.

Definidas as operações como:

Soma (+): $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
$multiplicação\ (*) por\ um\ escalar$: $\beta(a, b) = (\beta a, \beta b)$

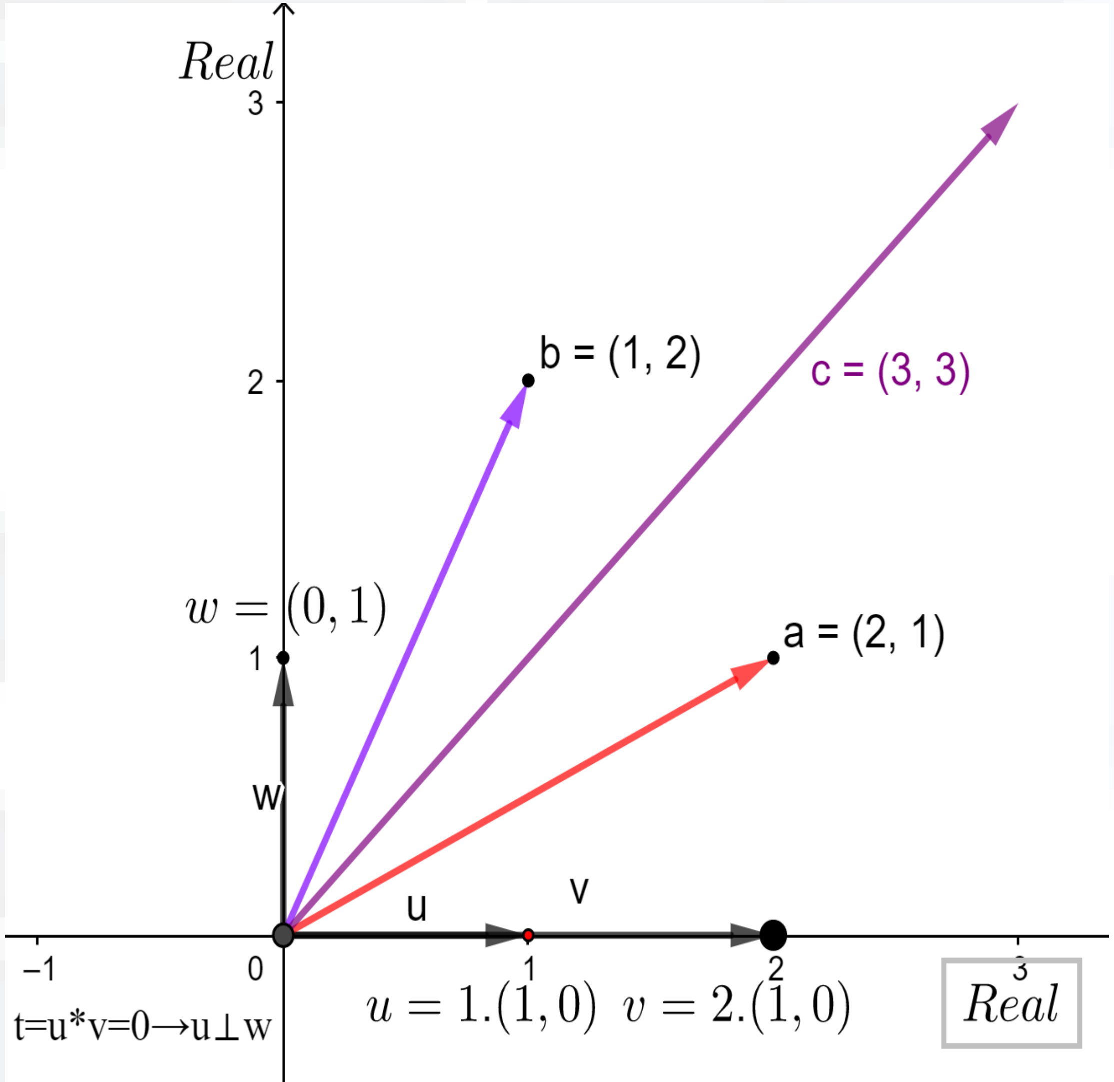
$(0,0)$ *elemento neutro da soma*:
$(a, b) + (0,0) = (a, b)$

$(1,0)$ *elemento neutro da múltiplicação por um escalar*:
$\beta * (1,0) = (\beta, 0) = \beta$

Multiplicação dois vetores:
$(a, b) * (c, d) = ac + bd$, *ou seja um escalar*

$(1,0) * (0,1) = 1.0 + 0.1 = 0 \rightarrow$ *esses vetores são* $\perp$.
$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta,\ \vec{u}.\vec{v} = 0 \rightarrow \theta = 90º$

Representação Geométrica



Corpo dos Complexos ($\mathbb{C}$)

Os $\mathbb{C}$ e o $\mathbb{R}^2$ são conjuntos iguais com mesmo Espaço Vetorial. Representamos (geometricamente) os complexos por um par ordenado $z = (a, b)$. Contudo, apesar de a, b serem reais, definimos que a é a parte $Real$ de $z \rightarrow Re(z)$ e b parte $Imaginária$ de $z \rightarrow Im(z)$, e para representá-los geometricamente usamos o Plano Argand-Gauss. (veremos adiante)

Definidas as operações como:

Soma (+): $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
Multiplicação (*): $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
$multiplicação\ por\ um\ escalar\ \beta$: $\beta(a, b) = (\beta a, \beta b)$

$(0,0)$ $elemento\ neutro\ da\ soma$: $(a, b) + (0,0) = (a + 0, b + 0) = (a, b)$

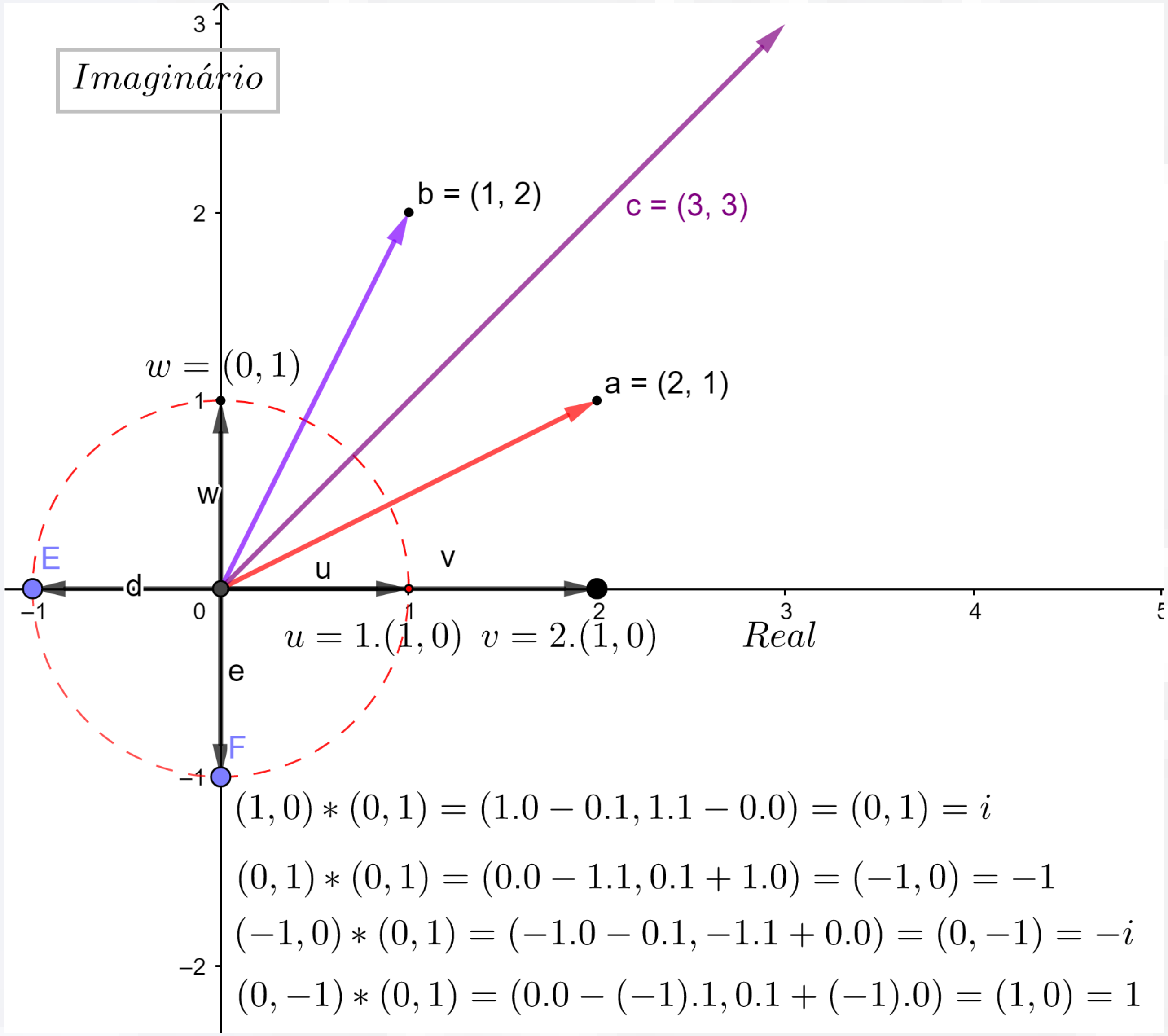
$(1,0)$ $elemento\ neutro\ da\ multiplicação$: $(a, b) * (1,0) = (a.1 - b.0, a.0 + b.1) = (a, b)$

Aplicando a definição de multiplicação no par $(0,1)$, temos $(0,1) * (0,1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1,0) = -1$

Euler adotou $i = \sqrt{-1}$, ou seja, o par ordenado $(0,1)$ $como\ i$, logo $i^2 = -1$

Pelo apresentado acima, temos $z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + b.(0,1) \rightarrow z = a + bi$

Representação Geométrica



Módulo e distância entre dois números no Corpo dos Reais

$|a| = a \; e \; |-a| = a$
$d(x, y) = |x - y|$

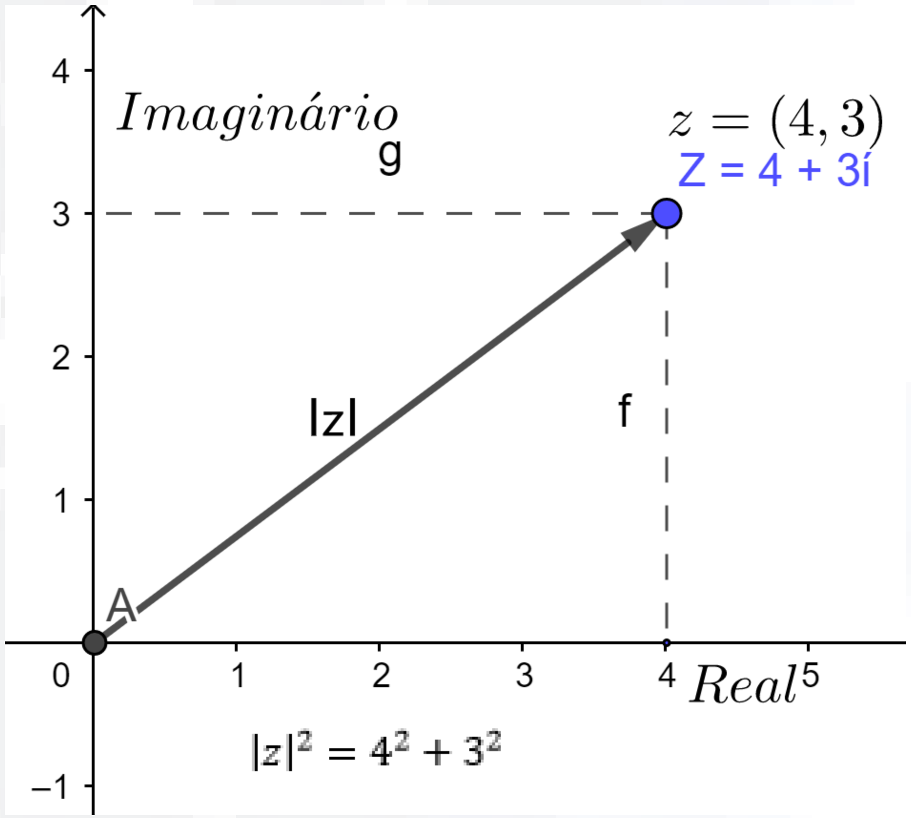
Módulo (Distância entre dois pontos) no $(\mathbb{R}^2, +, ^*)$ O Espaço vetorial Real de dimensão dois.

Dados os $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$ o Módulo (Distância entre dois pontos) é dado por:

$$d(\overline{AB}) = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

Como o Espaço vetorial Real $(\mathbb{R}^2, +, ^*)$ de dimensão dois é o Corpo dos $\mathbb{C}$, vamos aplicar em $z = (a, b)$

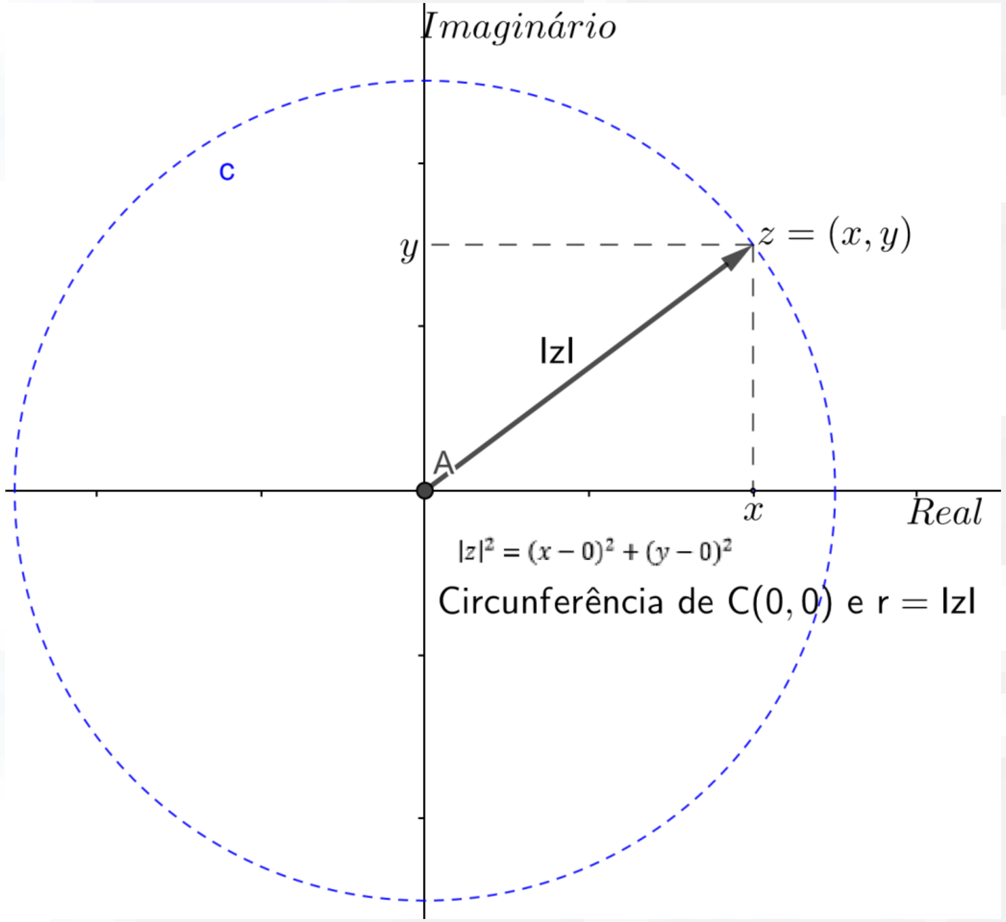
$|z| = distância \; do \; afixo \; de \; z \; até \; a \; origem \rightarrow$
$|z| = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2}$

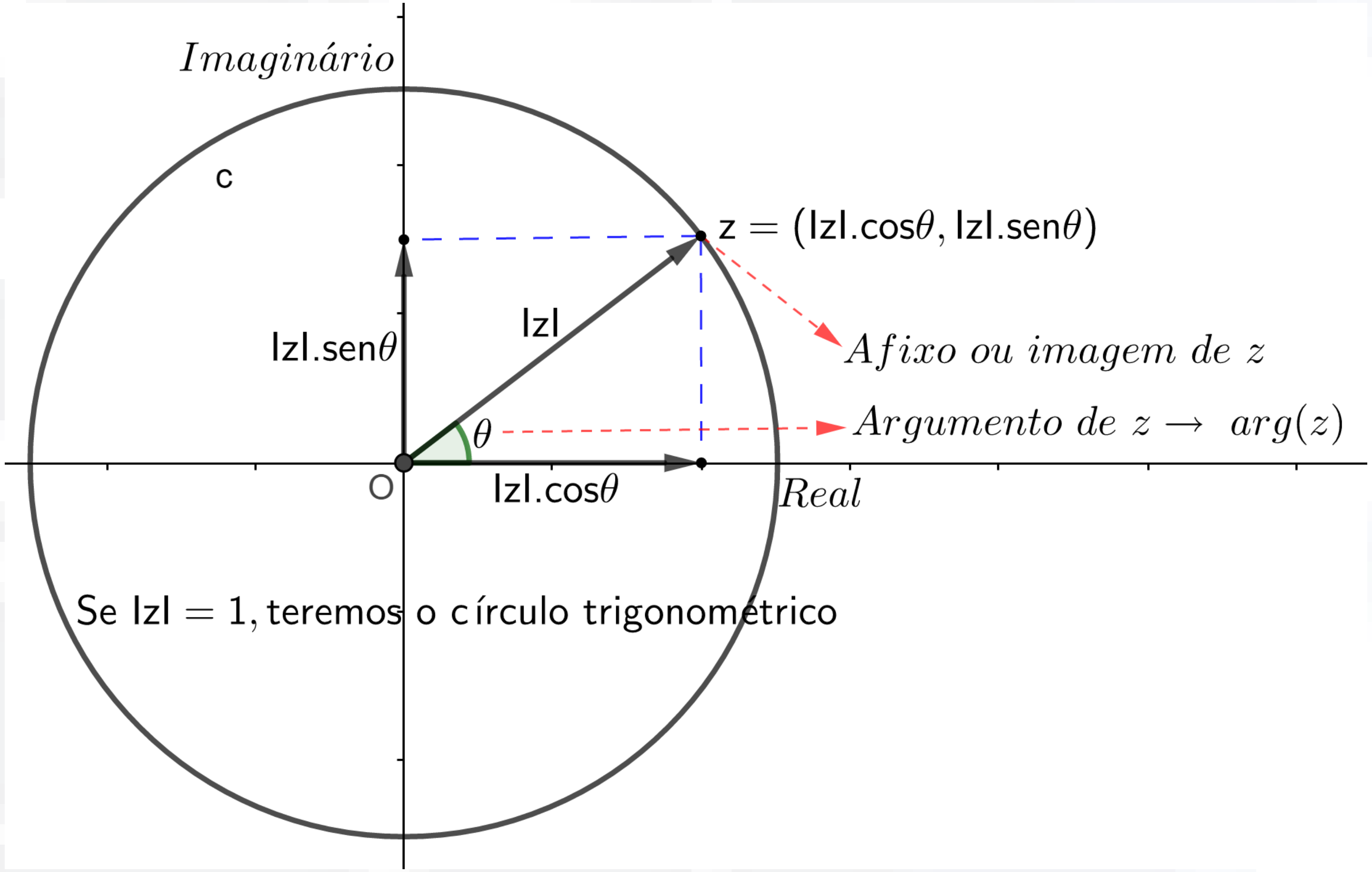


Sendo $z = a + bi$ a sua forma algébrica

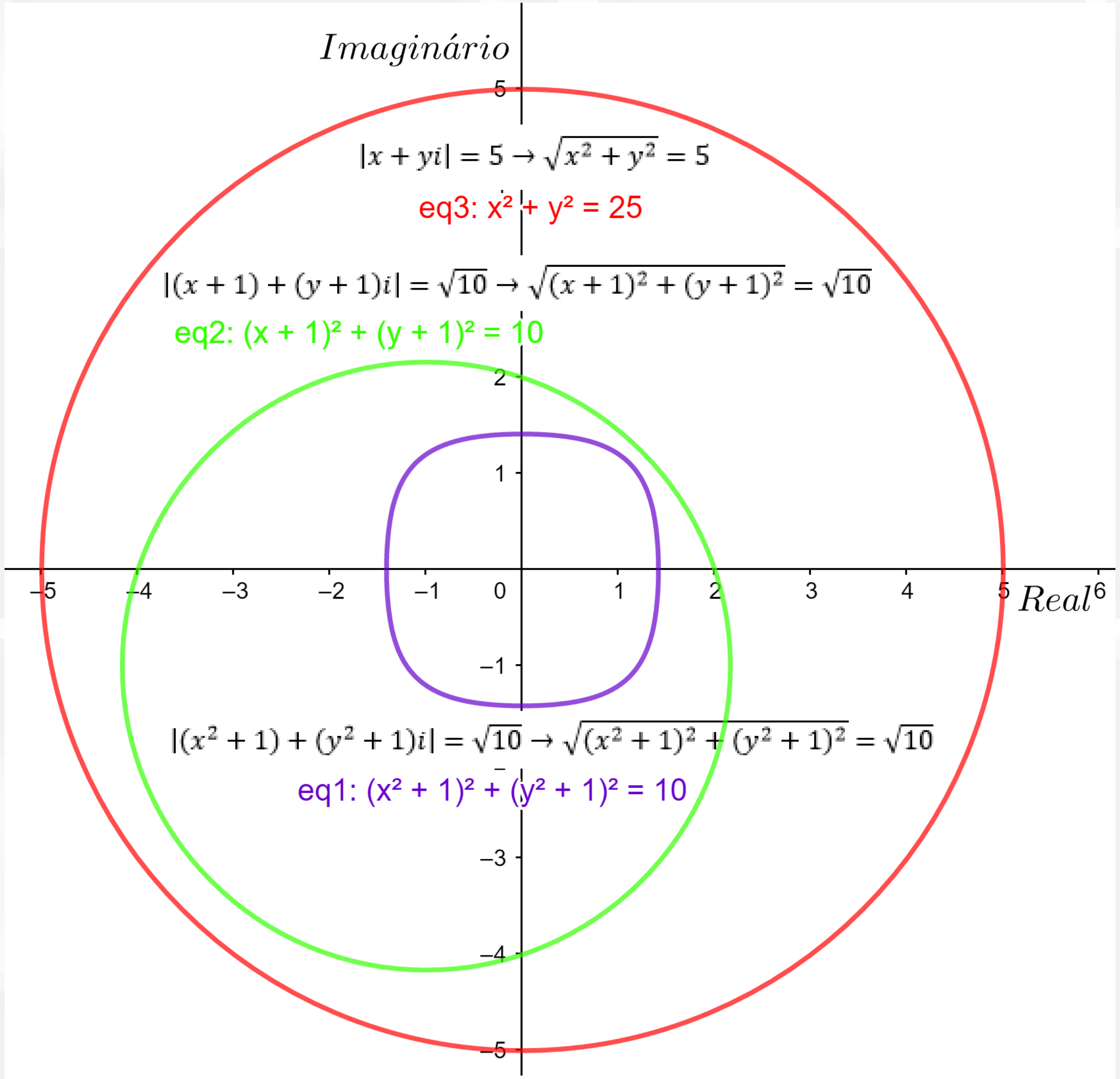
Vamos usar $z = (x, y)$ e $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, *pois facilita relacionar com GA.*

Generalizando





Os números complexos, quando tratamos de seu módulo, podem gerar diversos *lugares geométricos* (conjunto de pontos de um plano que gozam de uma determinada propriedade)

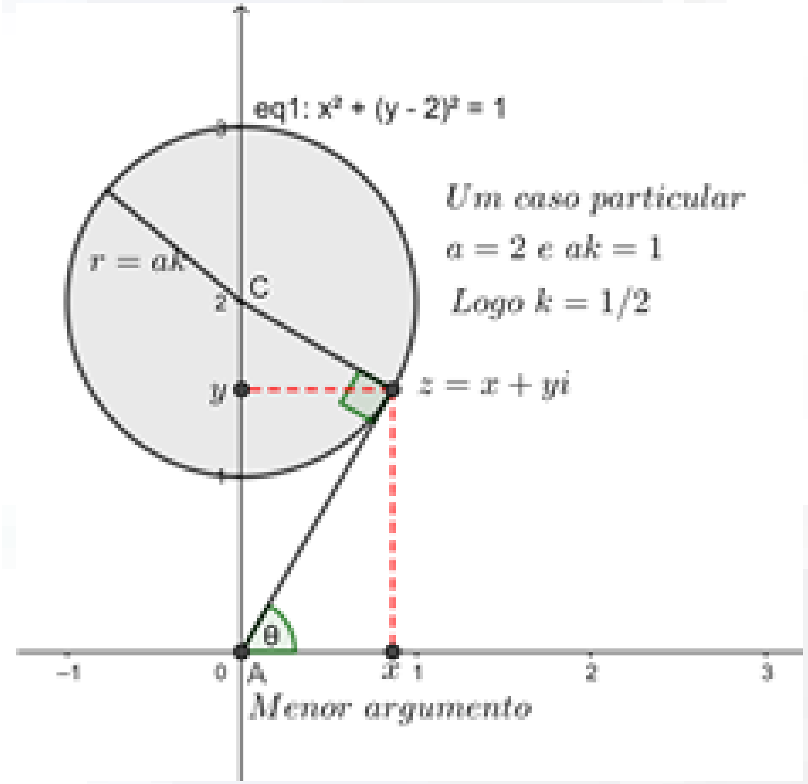


POSSÍVEIS APLICAÇÕES DA TEORIA

Sejam a e k constantes reais, sendo $a > 0$ e $0 < k < 1$. de todos os números complexos z que satisfazem a relação $|z - ai| \leq ak$, qual é o de menor argumento.

$$z = x + yi \Rightarrow |x + yi - ai| \leq ak \Longrightarrow |x + (y-a)i| \leq ak \Longrightarrow \sqrt{x^2 + (y-a)^2} \leq ak \Longrightarrow$$
$$x^2 + (y-a)^2 \leq (ak)^2$$

Essa relação representa a área de um círculo de centro $C(0, a)$ e $r = ak$



Perceba que para termos o menor argumento a reta suporte do módulo de z tem que ser tangente à circunferência.

Portanto, temos um triângulo retângulo AZC com $AC = a$; $ZC = ak$ e queremos achar x e y, que correspondem à altura e projeção do cateto AZ, do triângulo.

Aplicando Pitágoras, temos $AZ^2 + ZC^2 = AC^2 \Longrightarrow AZ^2 + (ak)^2 = a^2$

$AZ^2 = a^2 - (ak)^2 = a^2(1 - k^2) \rightarrow AZ = a\sqrt{1 - k^2}$.

Usando as relações métricas no triângulo retângulo, temos

$x.a = ak.AZ \Longrightarrow x = k.a\sqrt{1 - k^2} \Rightarrow x = ak\sqrt{(1 - k^2)}$

$AZ^2 = ya \Rightarrow a^2(1 - k^2) = ya \Rightarrow y = a(1 - k^2)$

Então, o complexo procurado é

$$z = ak\sqrt{(1 - k^2)} + a(1 - k^2)i$$

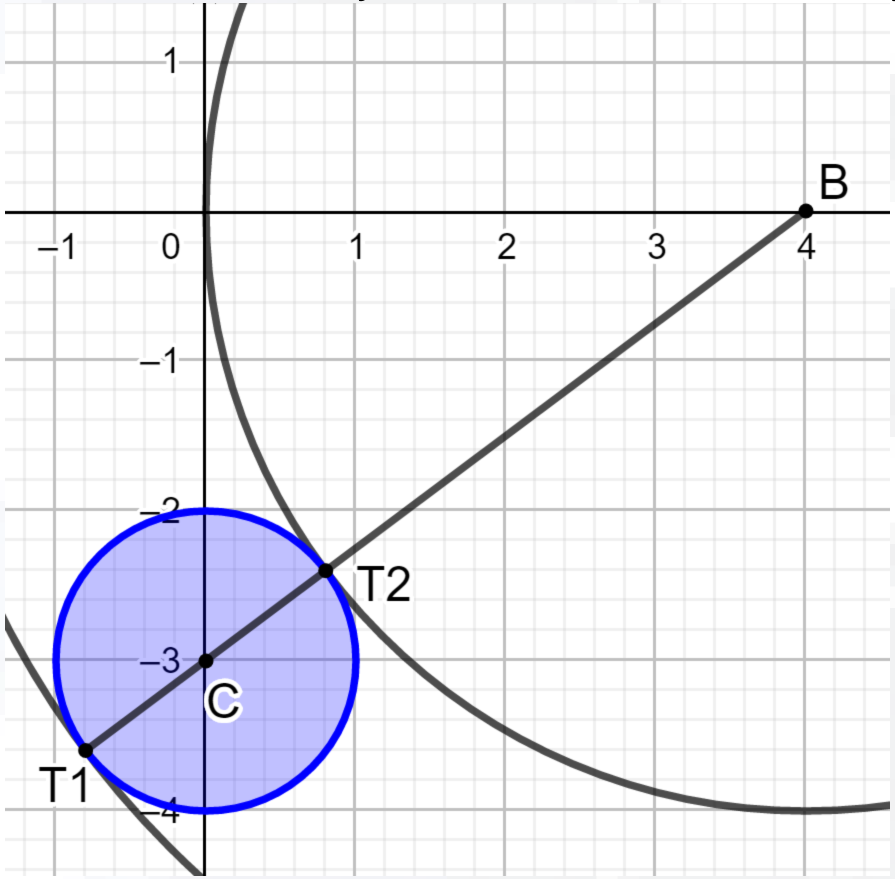
Verificando em nosso caso particular

$$z = 2\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)} + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)i \Rightarrow z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

8. Determine os valores máximos e mínimos de $|z-4|$, sabendo-se que $|z+3i| \leq 1$.

Inicialmente, diremos que pretendemos encontrar os complexos w, tais que $|z-4| = w$, atenda a condição do exercício.

Se $z = x + yi$, segue que $|x+yi+3i| \leq 1 \rightarrow |x+(y+3)i| \leq 1 \rightarrow \sqrt{x^2+(y+3)^2} \leq 1 \rightarrow x^2+(y+3)^2 \leq 1$ e
$|z-4| = w \rightarrow |x+yi-4| = w \rightarrow |(x-4)+yi| = w \rightarrow \sqrt{(x-4)^2+y^2} = w \rightarrow (x-4)^2+y^2 = w^2$



Então a inequação $x^2+(y+3)^2 \leq 1$, representa os números complexos que formam o círculo de $\mathrm{C}(0,-3)\ e\ r = 1$ e a equação $(x-4)^2+y^2 = w^2$, representa uma circunferência de $\mathrm{B}(4,0) e\ r = w$. Vendo, geometricamente, essa situação, temos o esboço ao lado, onde $\mathrm{B}T_1 = w_1$ e $BT_2 = w_2$, pois o mínimo e o máximo procurados, são os pontos de tangência das circunferências com centro em $B\ e\ C$.
Pelo triângulo retângulo formado pela origem e os pontos $B\ e\ C$, temos que $BC = 5$. Logo, para encontrarmos o $w_1\ e\ w_2$, basta somarmos e subtrairmos o $r = 1\ de\ AC$.
Chega-se a $w_2 = 4\ e\ w_1 = 6$

Dado o número complexo $z = \frac{3}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{2}}yi - \frac{6}{\sqrt{3}} - \frac{6}{\sqrt{2}}i$ e sabendo que $|z| = \sqrt{6}$, determine o lugar geométrico que contém todos os números z e as equações das retas neste plano Argand-Gauss que passam pela a origem e são tangentes a esse lugar geométrico.

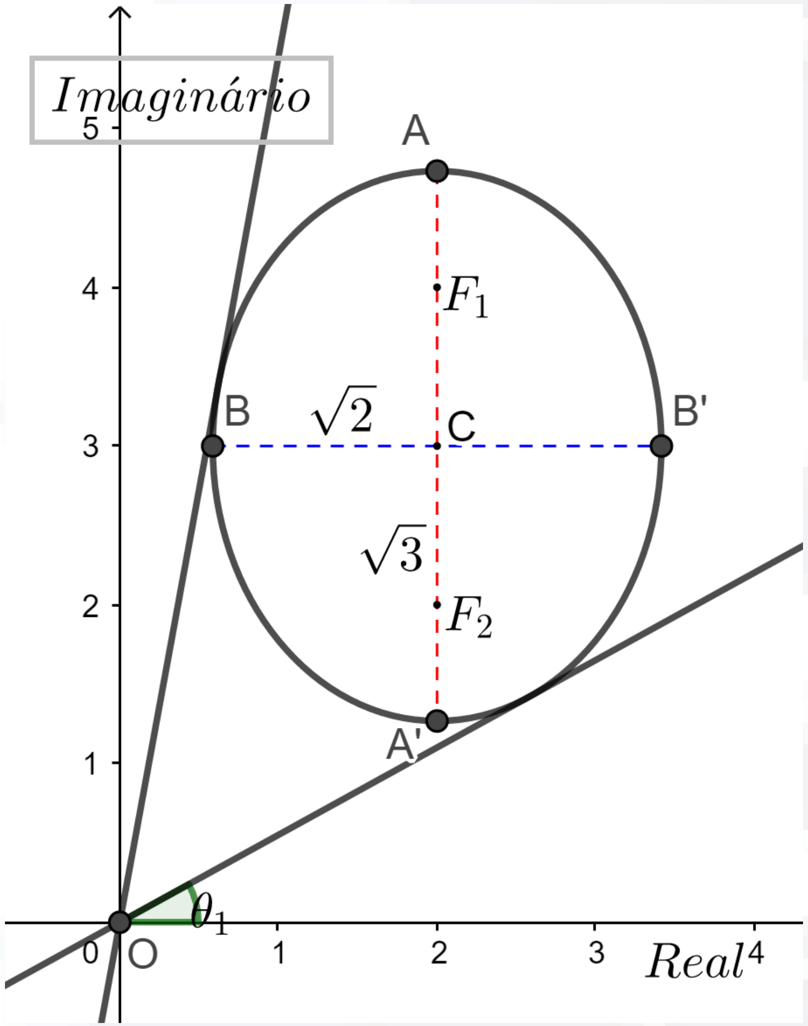
Primeiro vamos achas o $Re(z)$ e o $Im(z)$
$\frac{3}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{2}}yi - \frac{6}{\sqrt{3}} - \frac{6}{\sqrt{2}}i$, fazendo as racionalizações ficamos com $\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}yi - 3\sqrt{2}i$, logo

$$z = \sqrt{3}(x-2) + \sqrt{2}(y-3)i \rightarrow \left|\sqrt{3}(x-2) + \sqrt{2}(y-3)i\right| = \sqrt{6} \rightarrow \sqrt{\left[\sqrt{3}(x-2)\right]^2 + \left[\sqrt{2}(y-3)\right]^2} = \sqrt{6}$$

$$3.(x-2)^2 + 2.(y-3)^2 = 6 \rightarrow \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y-3)^2}{3} = 1$$

O lugar geométrico procurado é uma elipse de centro $(2,3)$ eixo maior $\sqrt{3}$, paralelo ao eixo imaginário, e eixo menor $\sqrt{2}$.

Agora, vamos encontrar as equações das retas neste plano Argand-Gauss que passam pela a origem e são tangentes a esse lugar geométrico.



Retas que passam pela origem (0,0), aplicando $y - y_0 = m.(x - x_0)$

$y - 0 = m.(x - 0) \to y = mx$

Nos pontos de tangência temos que os y da elipse e da reta são iguais, logo, substituindo o y da reta na parábola, temos:

$3.(x-2)^2 + 2.(mx-3)^2 = 6 \to 3x^2 - 12x + 12 + 2m^2x^2 - 12mx + 18 = 6 \to$

$(3 + 2m^2)x^2 + (-12 - 12m)x + 24 = 0 \to para\ ter\ uma\ solução\ \Delta = 0$

$b^2 - 4ac = 0 \to (-12 - 12m)^2 - 4(3 + 2m^2)24 = 0 \to$

$144(1+m)^2 - 96(3 + 2m^2) = 0 \to 3(1+m)^2 - 2(3 + 2m^2) = 0 \to$

$m^2 - 6m + 3 = 0$

Resolvendo, encontra-se $m_1 = 3 - \sqrt{6}$ e $m_2 = 3 + \sqrt{6}$

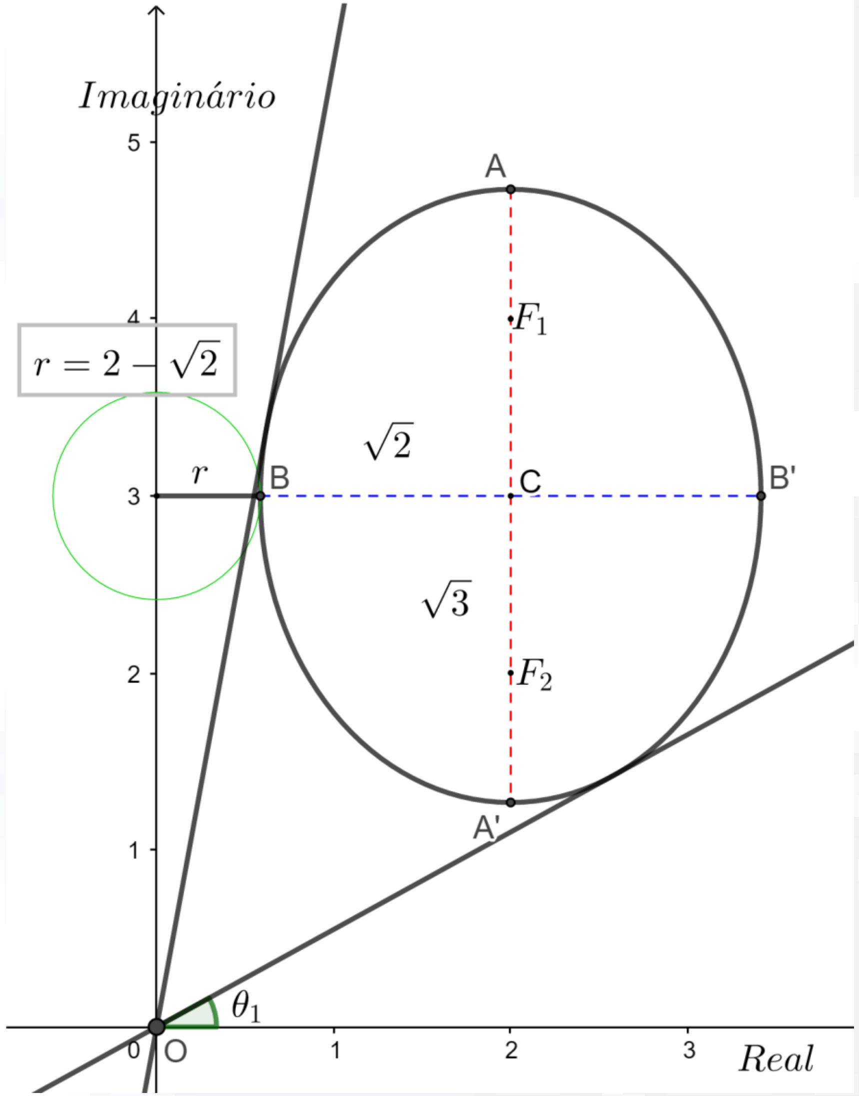
Logo:

$y_1 = (3 - \sqrt{6})x \quad e \quad y_2 = (3 + \sqrt{6})x$

Explorando um pouco mais nosso exercício, vamos agora determinar o valor mínimo de $|z - 3i|$

a) z pertencente ao lugar geométrico encontrado; e

b) Em relação à reta de menor argumento.



$a)$ $|z - 3i| = r \to |x + yi - 3i| = w \to |x + (y - 3)i| = w \to$
$\sqrt{(x)^2 + (y-3)^2} = w \to x^2 + (y-3)^2 = r^2$. Representa uma circunferência de Centro $(0,3)$ $e\ raio = r$

Como o $Centro$ faz parte da reta suporte do eixo menor da elipse, o valor mínimo é a parte real do complexo B, que é igual a parte de real de C subtraído de $\sqrt{2}$, portando a distância mínima será $r = 2 - \sqrt{2}$.

$b)$ Reta menor argumento $y_1 = (3 - \sqrt{6})x \ \to (3 - \sqrt{6})x - \mathrm{y} = 0$

Desejamos encontrar a distância $d_{(Centro, y_1)} = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$

$$d_{(Centro, y_1)} = \left|\frac{(\sqrt{6} - 3).0 - 1.3 + 0}{\sqrt{(\sqrt{6} - 3)^2 + 1^2}}\right|$$

$$d_{(Centro, y_1)} = \left|\frac{-3}{\sqrt{16 - 6\sqrt{6}}}\right| = \frac{3}{\sqrt{16 - 6\sqrt{6}}}$$

Aulão Brasil

Construindo possibilidades para o seu futuro!!