QUESTÕES DE MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES
ITA 2001 A 2020 (ENUNCIADOS)

1) (ITA 2001) Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix}$. A soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa de A é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

2) (ITA 2001) Sejam A e B matrizes $n \times n$, e B uma matriz simétrica. Dadas as afirmações:

I. $AB+BA^t$ é simétrica.
II. $\left(A+A^t+B\right)$ é simétrica.
III. ABA^t é simétrica.
temos que:
a) apenas I é verdadeira
b) apenas II é verdadeira
c) apenas III é verdadeira
d) apenas I e III são verdadeiras
e) todas as afirmações são verdadeiras

3) (ITA 2001) Seja $m \in \mathbb{R}$, $m>0$. Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x-\left(\log_4 m\right)y+5z=0 \\ \left(\log_2 m\right)x+y-2z=0 \\ x+y-\left(\log_2 m^2\right)z=0 \end{cases}.$$

O produto dos valores de m para os quais o sistema admite solução não-trivial é:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) $2\log_2 5$

4) (ITA 2002) O seguinte trecho de artigo de um jornal local relata uma corrida beneficente de bicicletas:
"Alguns segundos após a largada, Ralf tomou a liderança, seguido de perto por David e Rubinho, nesta ordem. Daí em diante, eles não mais deixaram as primeiras três posições e, em nenhum momento da corrida, estiveram lado a lado mais do que dois competidores. A liderança, no entanto, mudou de mãos nove vezes entre os três, enquanto que em mais oito ocasiões diferentes aqueles que corriam na segunda e terceira posições trocaram de lugar entre si. Após o término da corrida, Rubinho reclamou para nossos repórteres que David havia conduzido sua bicicleta de forma imprudente pouco antes da bandeirada de chegada. Desse modo, logo atrás de David, Rubinho não pôde ultrapassá-lo no final da corrida."
Com base no trecho acima, você conclui que
a) David ganhou a corrida.
b) Ralf ganhou a corrida.
c) Rubinho chegou em terceiro lugar.
d) Ralf chegou em segundo lugar.
e) Não é possível determinar a ordem de chegada, porque o trecho não apresenta uma descrição matematicamente correta.

5) (ITA 2002) Seja a matriz $\begin{bmatrix} \cos 25^\circ & \operatorname{sen} 65^\circ \\ \operatorname{sen} 120^\circ & \cos 390^\circ \end{bmatrix}$. O valor de seu determinante é

a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) 1 e) 0

6) (ITA 2002) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n tais que $AB = A$ e $BA = B$. Então $\left[(A+B)^t\right]^2$ é igual a

a) $(A+B)^2$ b) $2(A^t \cdot B^t)$ c) $2(A^t + B^t)$ d) $A^t + B^t$ e) $A^t \cdot B^t$

7) (ITA 2002) Seja A uma matriz real 2×2. Suponha que α e β sejam dois números distintos, e V e W duas matrizes reais 2×1 não nulas, tais que $AV = \alpha V$ e $AW = \beta W$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $aV + bW$ é igual à matriz nula 2×1, então $a+b$ vale

a) 0 b) 1 c) -1 d) $\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$

8) (ITA 2002) 1. Mostre que se uma matriz quadrada não-nula A satisfaz a equação $A^3 + 3A^2 + 2A = 0$ (1), então $(A+I)^3 = A + I$, em que I é a matriz identidade.
2. Sendo dado que $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ satisfaz à equação (1) acima, encontre duas matrizes não-nulas B e C tais que $B^3 + C^3 = B + C = A$. Para essas matrizes você garante que o sistema de equações $(B-C)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tem solução $(x, y) \neq (0, 0)$? Justifique.

9) (ITA 2003) Sejam A e P matrizes $n\times n$ inversíveis e $B = P^{-1}AP$. Das afirmações:
I. B^T é inversível e $\left(B^T\right)^{-1} = \left(B^{-1}\right)^T$.
II. Se A é simétrica, então B também o é.
III. $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
é (são) verdadeira(s):
a) todas b) apenas I. c) apenas I e II. d) apenas I e III. e) apenas II e III.

10) (ITA 2003) O número de todos os valores de $a \in [0, 2\pi]$, distintos, para os quais o sistema nas incógnitas x, y e z é dado por

$$\begin{cases} -4x + y - 6z = \cos 3a \\ x + 2y - 5z = \operatorname{sen} 2a \\ 6x + 3y - 4z = -2\cos a \end{cases}$$

é possível e não-homogêneo, é igual a:
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

11) (ITA 2003) Sejam a, b, c e d números reais não-nulos. Exprima o valor do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{bmatrix}$$

na forma de um produto de números reais.

12) (ITA 2004) Seja $x \in \mathbb{R}$ e a matriz $A = \begin{bmatrix} 2^x & (x^2+1)^{-1} \\ 2^x & \log_2 5 \end{bmatrix}$. Assinale a opção correta.

a) $\forall x \in \mathbb{R},$ A possui inversa.

b) Apenas para $x > 0,$ A possui inversa.

c) São apenas dois os valores de x para os quais A possui inversa.

d) Não existe valor de x para o qual A possui inversa.

e) Para $x = \log_2 5,$ A não possui inversa.

13) (ITA 2004) Considere as afirmações dadas a seguir, em que A é uma matriz quadrada $n \times n,\ n \geq 2$:

I. O determinante de A é nulo se e somente se A possui uma linha ou coluna nula.

II. Se $A = (a_{ij})$ é tal que $a_{ij} = 0$ para $i > j,$ com $i, j = 1, 2, \ldots, n,$ então $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$..

III. Se B for obtida de A, multiplicando-se a primeira coluna por $\sqrt{2}+1$ e a segunda por $\sqrt{2}-1,$, mantendo-se inalteradas as demais colunas, então $\det B = \det A.$

Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s)

a) apenas II. b) apenas III. c) apenas I e II. d) apenas II e III. e) todas.

14) (ITA 2004) Assinale a opção que representa o lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano que satisfazem a equação

$$\det \begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 288$$

a) uma elipse. b) uma parábola. c) uma circunferência.

d) uma hipérbole. e) uma reta.

15) (ITA 2004) Se A é uma matriz real, considere as definições:

I – Uma matriz quadrada A é ortogonal se e só se A for inversível e $A^{-1} = A^t$.

II – Uma matriz quadrada A é diagonal se e só se $a_{ij} = 0,$ para todo $i, j = 1, 2, \ldots, n,$ com $i \neq j.$

Determine as matrizes quadradas de ordem 3 que são, simultaneamente, diagonais e ortogonais.

16) (ITA 2005) Em uma mesa de uma lanchonete, o consumo de 3 sanduíches, 7 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou $\text{R\$ } 31,50.$ Em outra mesa, o consumo de 4 sanduíches, 10 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou $\text{R\$ } 42,00.$ Então, o consumo de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta totaliza o valor de:

a) $\text{R\$}17,50$ b) $\text{R\$}16,50$ c) $\text{R\$}12,50$ d) $\text{R\$}10,50$ e) $\text{R\$ } 9,50$

17) (ITA 2005) O sistema linear $\begin{cases} bx+y=1 \\ by+z=1 \\ x+bz=1 \end{cases}$ não admite solução se e somente se o número real b for igual a:

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) -2

18) (ITA 2005) Sejam A e B matrizes 2×2 tais que $AB=BA$ e que satisfazem à equação matricial $A^2+2AB-B=0.$ Se B é inversível, mostre que: (a) $AB^{-1}=B^{-1}A$ e que (b) A é inversível.

19) (ITA 2006) A condição necessária para que as constantes reais a e b tornem incompatível o sistema linear $\begin{cases} x+y+3z=2 \\ x+2y+5z=1 \\ 2x+2y+az=b \end{cases}$ é:

a) $a-b\neq 2$ b) $a+b=10$ c) $4a-6b=0$ d) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{2}$ e) $a\cdot b=24$

20) (ITA 2006) Se $\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix}=-1,$ então o valor do $\det\begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$ é igual a:

a) 0 b) 4 c) 8 d) 12 e) 16

21) (ITA 2006) Seja o sistema linear nas incógnitas x e y, com a e b reais, dado por

$$\begin{cases} (a-b)x-(a+b)y=1 \\ (a+b)x+(a-b)y=1 \end{cases}.$$

Considere as seguintes afirmações:

I – O sistema é possível e indeterminado se $a=b=0.$

II – O sistema é possível e determinado se a e b não são simultaneamente nulos.

III $-$ $x^2+y^2=\left(a^2+b^2\right)^{-1}$, se $a^2+b^2\neq 0.$

Então, pode-se afirmar que é(são) verdadeira(s) apenas:

a) I b) II c) III d) I e II e) II e III

22) (ITA 2006) Sejam as matrizes $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1/2 & 5 \end{bmatrix}$. Determine o elemento c_{34} da matriz $C=(A+B)^{-1}$.

23) (ITA 2007) Sejam $A=(a_{jk})$ e $B=(b_{jk})$, duas matrizes quadradas $n\times n$, onde a_{jk} e b_{jk} são, respectivamente, os elementos da linha j e coluna k das matrizes A e B, definidos por

$a_{jk}=\binom{j}{k}$, quando $j\geq k$, $a_{jk}=\binom{k}{j}$, quando $j<k$, e $b_{jk}=\sum_{p=0}^{jk}(-2)^p\binom{jk}{p}$.

O traço de uma matriz quadrada (c_{jk}) de ordem $n\times n$ é definido por $\sum_{p=1}^{n}c_{pp}$. Quando n for ímpar, o traço de $A+B$ é igual a

a) $\frac{n(n-1)}{3}$ b) $\frac{(n-1)(n+1)}{4}$ c) $\frac{(n^2-3n+2)}{(n-2)}$ d) $\frac{3\cdot(n-1)}{n}$ e) $\frac{(n-1)}{n-2}$

24) (ITA 2008) Considere o sistema $Ax=b$, em que

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & k & 6\\ -1 & 3 & k-3\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1\\6\\0\end{pmatrix} \text{ e } k\in\mathbb{R}.$$

Sendo T a soma de todos os valores de k que tornam o sistema impossível e sendo S a soma de todos os valores de k que tornam o sistema possível e indeterminado, então o valor de $T-S$ é

a) -4 b) -3 c) 0 d) 1 e) 4

25) (ITA 2008) Sejam A e C matrizes $n\times n$ inversíveis tais que $\det(I+C^{-1}A)=\frac{1}{3}$ e $\det A=5$. Sabendo-se que $B=3(A^{-1}+C^{-1})^t$, então o determinante de B é igual a

a) 3^n b) $2\cdot\frac{3^n}{5^2}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3^{n-1}}{5}$ e) $5\cdot 3^{n-1}$

26) (ITA 2008) Uma matriz real quadrada A é ortogonal se A é inversível e $A^{-1}=A^t$. Determine todas as matrizes 2×2 que são simétricas e ortogonais, expressando-as, quando for o caso, em termos de seus elementos que estão fora da diagonal principal.

27) (ITA 2009) Dados $A\in M_{3x2}(\mathbb{R})$ e $b\in M_{3x1}(\mathbb{R})$, dizemos que $X_0\in M_{2x1}(\mathbb{R})$ é a melhor aproximação quadrática do sistema $AX=b$ quando $\sqrt{(AX_0-b)^t(AX_0-b)}$ assume o menor valor possível. Então, dado o sistema

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

A sua melhor aproximação quadrática é

a) $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

28) (ITA 2009) O sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, com $(c_1, c_2) \neq (0,0)$, $a_1c_1 + a_2c_2 = b_1c_1 + b_2c_2 = 0$, é
a) determinado
b) determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$.
c) determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$ ou $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$.
d) impossível.
e) indeterminado.

29) (ITA 2009) Seja $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e não nula, cujos elementos são tais que a_{11}, a_{12} e a_{22} formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e $\text{tr}A = 5a_{11}$. Sabendo-se que o sistema $AX = X$ admite solução não nula $X \in M_{2\times1}(\mathbb{R})$, pode-se afirmar que $a_{11}^2 + q^2$ é igual a
a) $\frac{101}{25}$ b) $\frac{121}{25}$ c) 5 d) $\frac{49}{9}$ e) $\frac{25}{4}$

30) (ITA 2009) Sejam $A, B \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$. Mostre as propriedades abaixo:
a) Se AX é a matriz coluna nula, para todo $X \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$, então A é a matriz nula.
b) Se A e B são não nulas e tais que AB é a matriz nula, então $\det A = \det B = 0$.

31) (ITA 2010) Um polinômio real $p(x) = \sum_{n=0}^{5} a_n x^n$, com $a_5 = 4$, tem três raízes reais distintas, a, b e c, que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ a + 4b + 2c = 6 \\ 2a + 2b + 2c = 5 \end{cases}$$

Sabendo que a maior das raízes é simples e as demais têm multiplicidade dois, pode-se afirmar que $p(1)$ é igual a
a) -4. b) -2. c) 2. d) 4. e) 6.

32) (ITA 2010) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix} \in M_{3x3}(\mathbb{R}),$$

em que $a_4 = 10$, $\det A = -1000$ e a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6 formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $d > 0$. Pode-se afirmar que $\frac{a_1}{d}$ é igual a
a) -4 b) -3 c) -2 d) -1 e) 1

33) (ITA 2010) Sobre os elementos da matriz

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{4x4}\ (\mathbb{R})$$

sabe-se que (x_1, x_2, x_3, x_4) e (y_1, y_2, y_3, y_4) são duas progressões geométricas de razão 3 e 4 e de soma 80 e 255, respectivamente. Então, $\det(A^{-1})$ e o elemento $(A^{-1})_{23}$ valem, respectivamente,

a) $\frac{1}{72}$ e 12. b) $-\frac{1}{72}$ e -12. c) $-\frac{1}{72}$ e 12. d) $-\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$. e) $\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$.

34) (ITA 2010) Considere as matrizes $A \in M_{4x4}(\mathbb{R})$ e $M_{4x1}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & b & 1 \\ b & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -a & 2 & b & 1 \end{bmatrix};\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

a) Encontre todos os valores reais de a e b tais que a equação $AX = B$ tenha solução única.

b) Se $a^2 - b^2 = 0$, $a \neq 0$ e $B = [1\,1\,2\,4]^t$, encontre X tal que $AX = B$.

35) (ITA 2011) O sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ y + 2z = b \\ 3x - y - 5cz = 0 \end{cases}$

a) é possível, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) é possível quando $a = \frac{7b}{3}$ ou $c \neq 1$.

c) é impossível quando $c = 1$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

d) é impossível quando $a \neq \frac{7b}{3}$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

e) é possível quando $c = 1$ e $a \neq \frac{7b}{3}$.

36) (ITA 2011) Considere as afirmações abaixo:

I. Se M é uma matriz quadrada de ordem $n > 1$, não–nula e não–inversível, então existe matriz não–nula N, de mesma ordem, tal que $M \cdot N$ é matriz nula.

II. Se M é uma matriz quadrada inversível de ordem n tal que $\det(M^2 - M) = 0$, então existe matriz não–nula X, de ordem $n \times 1$, tal que $MX = X$.

III. A matriz $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta} & 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ é inversível, $\forall \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Destas, é(são) verdadeira(s):

a) apenas II. b) apenas I e II. c) apenas I e III. d) apenas II e III. e) todas.

37) (ITA 2011) Determine todas as matrizes $M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $MN = NM$, $\forall N \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

38) (ITA 2012) Considere a matriz quadrada A em que os termos da diagonal principal são 1, $1+x_1$, $1+x_2$, $\ldots$, $1+x_n$ e todos os outros termos são iguais a 1. Sabe-se que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e a razão é 4. Determine a ordem da matriz A para que o seu determinante seja igual a 256.

39) (ITA 2012) Seja n um número natural. Sabendo que o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} n & \log_2 2 & -\log_2 \frac{1}{2} \\ n+5 & \log_3 3^n & \log_3 243 \\ -5 & \log_5 \frac{1}{125} & -\log_5 25 \end{bmatrix}$$

é igual a 9, determine n e também a soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa A^{-1}.

40) (ITA 2013) Considere $A \in M_{5\times 5}(\mathbb{R})$ com $\det(A) = \sqrt{6}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $\det(\alpha A^t A A^t) = \sqrt{6}\,\alpha^2$, o valor de α é

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ c) $\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$ d) 1 e) $\sqrt{216}$

41) (ITA 2013) Considere o sistema nas variáveis reais x e y:

$$\begin{cases} x \operatorname{sen}\alpha + 3y\cos\alpha = a \\ x\cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha = b \end{cases},$$

com $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Analise para que valores de α, a e b o sistema é (i) possível determinado, (ii) possível indeterminado ou (iii) impossível, respectivamente. Nos casos (i) e (ii), encontre o respectivo conjunto solução.

42) (ITA 2014) Considere as seguintes afirmações sobre as matrizes quadradas A e B de ordem n, com A inversível e B antissimétrica:
I. Se o produto AB for inversível, então n é par;
II. Se o produto AB não for inversível, então n é ímpar;
III. Se B for inversível, então n é par.
Destas afirmações, é (são) verdadeira(s)
a) apenas I. b) apenas I e II. c) apenas I e III. d) apenas II e III. e) todas.

43) (ITA 2014) Sejam $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ y & -x & 1\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}x+1 & x\\ y-2 & y\\ z+3 & z\end{bmatrix}$ matrizes reais tais que o produto AB é uma matriz antissimétrica. Das afirmações abaixo:

I. BA é antissimétrica;
II. BA não é inversível;
III. O sistema $(BA)X=0$, com $X^t=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}$, admite infinitas soluções,

é (são) verdadeira(s)

a) apenas I e II. b) apenas II e III. c) apenas I. d) apenas II. e) apenas III.

44) (ITA 2014) Seja M uma matriz quadrada de ordem 3, inversível, que satisfaz a igualdade

$$\det(2M^2)-\det(\sqrt[3]{2}M^3)=\frac{2}{9}\det(3M).$$

Então, um valor possível para o determinante da inversa de M é

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{5}$ e) $\frac{5}{4}$

45) (ITA 2014) Considere a equação $A(t)X=B(t)$, $t\in\mathbb{R}$, em que $A(t)=\begin{bmatrix}2e^{-2t} & -e^{2t} & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ e $B(t)=\begin{bmatrix}e^t\\ -\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}$. Sabendo que $\det A(t)=1$ e $t\neq 0$, os valores de x, y e z são, respectivamente,

a) $2\sqrt{2}$, 0, $-3\sqrt{2}$. b) $-2\sqrt{2}$, 0, $-3\sqrt{2}$. c) 0, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$.
d) 0, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$. e) $2\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, 0.

46) (ITA 2014) Considere o sistema linear nas incógnitas x, y e z

$$\begin{cases} x+y+2z=0\\ -x+(\operatorname{sen}\theta)y+4z=0\\ 2x+(1-\cos 2\theta)y+16z=0\end{cases},\quad \theta\in[0,2\pi]..$$

a) Determine θ tal que o sistema tenha infinitas soluções.
b) Para θ encontrado em (a), determine o conjunto-solução do sistema.

47) (ITA 2015) Seja $A=(a_{ij})_{5\times 5}$ a matriz tal que $a_{ij}=2^{i-1}(2j-1)$, $1\le i,j\le 5$. Considere as afirmações a seguir:

I. Os elementos de cada linha i formam uma progressão aritmética de razão 2^i.
II. Os elementos de cada coluna j formam uma progressão geométrica de razão 2.
III. $\operatorname{tr} A$ é um número primo.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas I e II. c) apenas II e III. d) apenas I e III. e) I, II e III.

48) (ITA 2015) Considere a matriz $M = (m_{ij})_{2\times 2}$ tal que $m_{ij} = j - i + 1,\ i, j = 1, 2.$ Sabendo-se que

$$\det\left(\sum_{k=1}^{n} M^k - n\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right) = 252,$$

Então o valor de n é igual a

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

49) (ITA 2015) Sejam α e β números reais não nulos. Determine os valores de b, c, d, bem como a relação entre α e β para que ambos os sistemas lineares S e T a seguir sejam compatíveis indeterminados.

$$S\begin{cases}2x + by = \alpha\\ cx + y = \beta\end{cases} \qquad T\begin{cases}cx + 3y = \alpha\\ 4x + dy = \beta\end{cases}$$

50) (ITA 2016) Se o sistema de equações

$$\begin{cases}x + y + 4z = 2\\ x + 2y + 7z = 3\\ 3x + y + az = b\end{cases}$$

é impossível, então os valores de a e b são tais que

a) $a = 6$ e $b \neq 4.$ b) $a \neq 6$ e $b \neq 4.$ c) $a \neq 6$ e $b = 4.$

d) $a = 6$ e $b = 4.$ e) a é arbitrário e $b \neq 4.$

51) (ITA 2016) Se $M = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$, então $MN^T - M^{-1}N$ é igual a

a) $\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{5}{2}\\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{11}{2}\\ \frac{13}{2} & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{5}{2}\\ \frac{13}{2} & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{11}{2}\\ \frac{13}{2} & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$

52) (ITA 2016) Seja A a matriz de ordem $3 \times 2,$ dada por $A = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$

a) Determine todas as matrizes B tais que $BA = I_2.$

b) Existe uma matriz B com $BA = I_2$ que satisfaça $BB^T = I_2$? Se sim, dê um exemplo de uma dessas matrizes.

53) (ITA 2017) Considere o sistema de equações

$$S\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{27}{y^2}+\dfrac{8}{z^3}=3 \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{81}{y^2}+\dfrac{40}{z^3}=10 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{54}{y^2}+\dfrac{24}{z^3}=7 \end{cases}$$

Se (x, y, z) é uma solução real de S, então $|x|+|y|+|z|$ é igual a

a) 0 b) 3 c) 6 d) 9 e) 12

54) (ITA 2017) Sejam $D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $P=\begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Considere $A=P^{-1}DP$. O valor de $\det\left(A^2+A\right)$ é

a) 144 b) 180 c) 240 d) 324 e) 360

55) (ITA 2017) Determine todos os valores reais de a para os quais o seguinte sistema linear é impossível:

$$\begin{cases} x+ay+z=2 \\ -x-2y+3z=-1 \\ 3x+az=5 \end{cases}$$

56) (ITA 2018) Sejam $x_1, \ldots, x_5$ e $y_1, \ldots, y_5$ números reais arbitrários e $A=\left(a_{ij}\right)$ uma matriz 5×5 definida por $a_{ij}=x_i+y_j$, $1\le i, j\le 5$. Se r é a característica da matriz A, então o maior valor possível de r é

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

57) (ITA 2018) Sejam A e B matrizes quadradas $n\times n$ tais que $A+B=A\cdot B$ e I_n é a matriz identidade $n\times n$. Das afirmações:

I. I_n-B é inversível;

II. I_n-A é inversível;

III. $A\cdot B=B\cdot A$.

é (são) verdadeira(s)

a) somente I. b) somente II. c) somente III

d) somente I e III e) todas.

58) (ITA 2018) Se o sistema $\begin{cases} x+y+z & =0 \\ 2a^2y+\left(2a^4-a\right)z=0 \\ x+ay+\left(a^3-1\right)z & =0 \end{cases}$ admite infinitas soluções, então os possíveis valores do parâmetro a são

a) $0,\ -1,\ \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}.$

b) $0,\ -1,\ \dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}.$

c) $0,\ -1,\ \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}.$

d) $0,\ -1,\ -1-\sqrt{3},\ -1+\sqrt{3}.$

e) $0,\ -1,\ 1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}.$

59) (ITA 2018) Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ x\in\mathbb{R}$. Se o polinômio $p(x)$ é dado por $p(x)=\det A,$ então o produto das raízes de $p(x)$ é

a) $\dfrac{1}{2}.$ b) $\dfrac{1}{3}.$ c) $\dfrac{1}{5}.$ d) $\dfrac{1}{7}.$ e) $\dfrac{1}{11}.$

60) (ITA 2018) Uma progressão aritmética $\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)$ satisfaz a propriedade: para cada $n\in\mathbb{N},$ a soma da progressão é igual a $2n^2+5n.$ Nessas condições, o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7+2 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$ é

a) -96 b) -85 c) 63 d) 99 e) 115

61) (ITA 2019) Assinale a opção que identifica o lugar geométrico de todos os pares ordenados $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ que tornam impossível o sistema linear

$$S:\begin{cases} -x+5y=10 \\ \left(\dfrac{a^2}{5}+5b^2\right)x+10aby=1 \end{cases}$$

a) uma elipse b) uma reta c) uma parábola
d) uma hipérbole e) um único ponto

62) (ITA 2019) Considere as seguintes afirmações a respeito de matrizes A de ordem $n\times n$ inversíveis, tais que os seus elementos e os de sua inversa sejam todos números inteiros:

I. $\left|\det(A)\right|=1.$

II. $A^T=A^{-1}.$

III. $A+A^{-1}$ é uma matriz diagonal.

É(são) sempre VERDADEIRA(S)

a) apenas I. b) apenas III. c) apenas I e II.
d) apenas I e III. e) todas.

63) (ITA 2020) Considere o conjunto $M(n,k)$ de todas as matrizes quadradas de ordem $n \times n$, com exatamente k elementos iguais a 1, e os demais iguais a 0 (zero). Escolhendo aletoriamente matrizes $L \in M(3,1)$ e $R \in M(4,2)$, a probabilidade de que $L^2 = 0$ e $R^2 = 0$ é igual a

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{4}{15}$ d) $\frac{13}{30}$ e) $\frac{29}{30}$

RESPOSTAS E CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES

1) a (Matriz inversa)
2) e (Multiplicação de matrizes e matriz transposta)
3) a (Sistema homogêneo)
4) e (Teorema de Bézout)
5) e (Cálculo do determinante de ordem 2)
6) c (Multiplicação de matrizes e matriz transposta)
7) a (Autovalores e autovetores)
8) disc. (Multiplicação de matrizes e sistema homogêneo)
9) d (Teorema de Binet e matrizes semelhantes)
10) a (Discussão de sistemas lineares)
11) disc. (Determinante da matriz de Vandermonde)
12) a (Matriz inversa)
13) d (Propriedades dos determinantes)
14) c (Propriedades dos determinantes)
15) disc. (Matriz ortogonal)
16) d (Resolução de sistemas lineares)
17) a (Discussão de sistemas lineares)
18) disc. (Multiplicação de matrizes e matriz inversa)
19) a (Discussão de sistemas lineares)
20) d (Propriedades dos determinantes)
21) e (Discussão de sistemas de 2 equações e 2 variáveis)
22) disc. (Matriz inversa)
23) c (Traço da matriz quadrada)
24) a (Discussão de sistemas lineares)
25) d (Propriedade dos determinantes e teorema de Binet)
26) disc. (Matriz simétrica)
27) e (Multiplicação de matrizes)
28) d (Discussão de sistemas de 2 equações e 2 variáveis)
29) a (Sistema homogêneo)
30) disc. (Propriedades da multiplicação de matrizes)
31) a (Resolução de sistemas lineares)
32) d (Determinante da matriz triangular)
33) c (Cálculo de determinantes e matriz inversa)
34) disc. (Discussão de sistemas lineares)
35) b (Discussão de sistemas lineares)
36) e (Sistema homogêneo, propriedades dos determinantes e matriz inversível)
37) disc. (Multiplicação de matrizes)
38) disc. (Cálculo de determinantes)
39) disc. (Determinantes e matriz inversa)
40) c (Propriedades dos determinantes e teorema de Binet)
41) disc. (Discussão de sistemas de 2 equações e 2 variáveis)
42) c (Matriz inversível, propriedades do determinantes e teorema de Binet)
43) b (Multiplicação de matrizes, matriz antissimétrica e sistema homogêneo)
44) a (Propriedades dos determinantes e teorema de Binet)
45) b (Determinante de ordem 3 e resolução de sistemas lineares)
46) disc. (Sistema homogêneo)

47) e (Definição dos elementos da matriz)
48) c (Multiplicação de matrizes e cálculo de determinantes)
49) disc. (Discussão de sistemas de 2 equações e 2 variáveis)
50) a (Discussão de sistemas lineares)
51) c (Multiplicação de matrizes e matriz inversa)
52) disc. (Multiplicação de matrizes e matriz transposta)
53) c (Resolução de sistemas lineares)
54) a (Matrizes semelhantes, propriedades dos determinantes e teorema de Binet)
55) disc. (Discussão de sistemas lineares)
56) b (Característica da matriz)
57) e (Matriz inversível)
58) b (Sistema homogêneo)
59) d (Cálculo de determinantes e regra de Chió)
60) a (Cálculo de determinantes)
61) b (Discussão de sistemas de 2 equações e 2 variáveis)
62) a (Propriedades dos determinantes e matriz inversa)
63) b (Matrizes e probabilidade)

1) (ITA 2001) Considere a matriz $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{bmatrix}$. A soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa de A é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

RESOLUÇÃO: a

$A\cdot A^{-1}=I$

1ª linha de A: $L_1=\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}$

1ª coluna de A^{-1}: $C_1=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\phi\end{bmatrix}$

O elemento $a_{11}=1$ da matriz identidade é

$a_{11}=L_1\cdot C_1=1\Rightarrow 1\cdot\alpha+1\cdot\beta+1\cdot\gamma+1\cdot\phi=1\Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma+\phi=1$

2) (ITA 2001) Sejam A e B matrizes $n\times n$, e B uma matriz simétrica. Dadas as afirmações:

I. $AB+BA^t$ é simétrica.

II. $(A+A^t+B)$ é simétrica.

III. ABA^t é simétrica.

temos que:

a) apenas I é verdadeira
b) apenas II é verdadeira
c) apenas III é verdadeira
d) apenas I e III são verdadeiras
e) todas as afirmações são verdadeiras

RESOLUÇÃO: e

B é simétrica, então $B=B^t$

I. VERDADEIRA

$(AB+BA^t)^t=(AB)^t+(BA^t)^t=B^tA^t+(A^t)^tB^t=BA^t+AB=AB+BA^t$

Portanto, $AB+BA^t$ é simétrica.

Note que utilizamos as seguintes propriedades: $(A^t)^t=A$ e $(AB)^t=B^tA^t$.

II. VERDADEIRA

$(A+A^t+B)^t=A^t+(A^t)^t+B^t=A^t+A+B=A+A^t+B$

Portanto, $(A+A^t+B)$ é simétrica.

III. VERDADEIRA

$\left(ABA^t\right)^t = \left(A^t\right)^t B^t A^t = ABA^t$

Portanto, ABA^t é simétrica.

3) (ITA 2001) Seja $m \in \mathbb{R},\ m > 0.$ Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x - \left(\log_4 m\right) y + 5z = 0 \\ \left(\log_2 m\right) x + y - 2z = 0 \\ x + y - \left(\log_2 m^2\right) z = 0 \end{cases}.$$

O produto dos valores de m para os quais o sistema admite solução não-trivial é:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) $2\log_2 5$

RESPOSTA: a

O sistema do enunciado é homogêneo (matriz dos termos independentes é nula), então, para que admita solução não-trivial (todas as variáveis nulas), o determinante da matriz incompleta do sistema deve ser nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & -\log_4 m & 5 \\ \log_2 m & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -\log_2 m^2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow -2\log_2 m^2 + 2\log_4 m + 5\log_2 m - 5 - \log_4 m \cdot \log_2 m \cdot \log_2 m^2 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow -4\log_2 m + 2 \cdot \log_{2^2} m + 5\log_2 m - 1 - \log_{2^2} m \cdot \log_2 m \cdot \left(2\log_2 m\right) = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 m + 2 \cdot \frac{1}{2}\log_2 m - 1 - \frac{1}{2} \cdot \log_2 m \cdot \log_2 m \cdot \left(2\log_2 m\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\log_2 m - 1 - \left(\log_2 m\right)^3 = 0$

A equação anterior é uma equação do 3º grau na variável $\left(\log_2 m\right)\cdot$ Por inspeção, observamos que $\log_2 m = 1$ é raiz da equação. Vamos aplicar o algoritmo de Ruffini-Horner.

1	–1	0	2	–1
	–1	–1	1	0

A equação anterior é equivalente a

$-\left(\log_2 m - 1\right)\left(\left(\log_2 m\right)^2 + \log_2 m - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \log_2 m = 1 \ \vee \ \log_2 m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow m = 2^1 \ \vee \ m = 2^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \ \vee \ m = 2^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$

O produto dos valores de m é $2^1 \cdot 2^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \cdot 2^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} = 2^0 = 1.$

Note que, ao observar que a equação do 3º grau possuía três raízes, seria possível observar que o m é igual a 2 elevado a cada raiz, de forma que o produto dos valores de m é 2 elevado à soma das raízes da equação do 3º grau que, pelas relações de Girard, é 0. Assim, o produto dos valores de m é $2^0 = 1.$

4) (ITA 2002) O seguinte trecho de artigo de um jornal local relata uma corrida beneficente de bicicletas:
"Alguns segundos após a largada, Ralf tomou a liderança, seguido de perto por David e Rubinho, nesta ordem. Daí em diante, eles não mais deixaram as primeiras três posições e, em nenhum momento da corrida, estiveram lado a lado mais do que dois competidores. A liderança, no entanto, mudou de mãos nove vezes entre os três, enquanto que em mais oito ocasiões diferentes aqueles que corriam na segunda e terceira posições trocaram de lugar entre si. Após o término da corrida, Rubinho reclamou para nossos repórteres que David havia conduzido sua bicicleta de forma imprudente pouco antes da bandeirada de chegada. Desse modo, logo atrás de David, Rubinho não pôde ultrapassá-lo no final da corrida."
Com base no trecho acima, você conclui que
a) David ganhou a corrida.
b) Ralf ganhou a corrida.
c) Rubinho chegou em terceiro lugar.
d) Ralf chegou em segundo lugar.
e) Não é possível determinar a ordem de chegada, porque o trecho não apresenta uma descrição matematicamente correta.

RESOLUÇÃO: e
Representemos Ralf por 1, David por 2 e Rubinho por 3.
Em cada momento da corrida, a classificação é uma terna ordenada desses três números, e a classificação inicial é dada por $(1;2;3)$, denominada permutação fundamental.
Como a liderança mudou de mãos 9 vezes, e em mais 8 ocasiões aqueles que corriam na segunda e terceira posições trocaram de lugar entre si, houve no total 17 inversões (trocas de posições nas ternas ordenadas).
Como houve um número ímpar de inversões, a classificação final deve ser uma permutação de classe ímpar, ou seja, $(2;1;3)$, $(1;3;2)$ ou $(3;2;1)$.
Na situação descrita, Rubinho chegou logo atrás de David, portanto a classificação final é $(1;2;3)$ ou $(2;3;1)$, que são ambas permutações de classe par, o que contradiz nossa conclusão anterior.
Consequentemente, não é possível determinar a ordem de chegada, porque o trecho não apresenta uma descrição matematicamente correta.

Note que foi utilizado o teorema de Bézout que estabelece que uma permutação muda de classe quando se troca a posição de dois quaisquer de seus elementos.

5) (ITA 2002) Seja a matriz $\begin{bmatrix} \cos 25^\circ & \text{sen}\, 65^\circ \\ \text{sen}\, 120^\circ & \cos 390^\circ \end{bmatrix}$. O valor de seu determinante é

a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) 1 e) 0

RESOLUÇÃO: e

$$\det\begin{bmatrix} \cos 25^\circ & \text{sen}\, 65^\circ \\ \text{sen}\, 120^\circ & \cos 390^\circ \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos 25^\circ & \text{sen}\left(90^\circ - 25^\circ\right) \\ \text{sen}\left(90^\circ + 30^\circ\right) & \cos\left(360^\circ + 30^\circ\right) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos 25^\circ & \cos 25^\circ \\ \cos 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} = 0$$

Observe que, se um determinante possui duas linhas ou colunas iguais ele é nulo.

6) (ITA 2002) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n tais que $AB = A$ e $BA = B$. Então $\left[(A+B)^t\right]^2$ é igual a

a) $(A+B)^2$ b) $2(A^t \cdot B^t)$ c) $2(A^t + B^t)$ d) $A^t + B^t$ e) $A^t \cdot B^t$

RESOLUÇÃO: c

$$\left[(A+B)^2\right]^t = \left(A^2 + AB + BA + B^2\right)^t = \left(A^2 + A + B + B^2\right)^t = (A + A + B + B)^t$$
$$= (2A + 2B)^t = 2 \cdot \left(A^t + B^t\right)$$
$$A^2 = A \cdot A = (AB) \cdot (AB) = A \cdot (BA) \cdot B = A \cdot B \cdot B = (AB) \cdot B = AB = A$$
$$B^2 = B \cdot B = (BA) \cdot (BA) = B \cdot (AB) \cdot A = B \cdot A \cdot A = (BA) \cdot A = BA = B$$

7) (ITA 2002) Seja A uma matriz real 2×2. Suponha que α e β sejam dois números distintos, e V e W duas matrizes reais 2×1 não nulas, tais que $AV = \alpha V$ e $AW = \beta W$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $aV + bW$ é igual à matriz nula 2×1, então $a + b$ vale

a) 0 b) 1 c) -1 d) $\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$

RESOLUÇÃO: a

$$aV + bW = 0 \Leftrightarrow aV = -bW$$
$$AV = \alpha V \Rightarrow a \cdot AV = a \cdot \alpha V \Leftrightarrow A \cdot (aV) = \alpha \cdot (aV) \Leftrightarrow A \cdot (-bW) = \alpha \cdot (-bW)$$
$$\Leftrightarrow -b \cdot (AW) = -\alpha \cdot b \cdot W \Leftrightarrow -b \cdot (\beta W) = -\alpha \cdot b \cdot W \Leftrightarrow b \cdot (\alpha - \beta) \cdot W = 0$$

Como $\alpha \neq \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \neq 0$ e W é não nula, então $b = 0$.
Como $aV = -bW = -0 \cdot W = 0$ e V é não nula, então $a = 0$.
Logo, $a + b = 0$.

Note que α e β são autovalores distintos da matriz A, e V e W os autovetores correspondentes. Assim, os autovetores V e W são linearmente independentes, logo a única combinação linear deles que resulta no vetor nulo é $a = b = 0$.

8) (ITA 2002) 1. Mostre que se uma matriz quadrada não-nula A satisfaz a equação $A^3 + 3A^2 + 2A = 0$ (1), então $(A + I)^3 = A + I$, em que I é a matriz identidade.
2. Sendo dado que $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ satisfaz à equação (1) acima, encontre duas matrizes não-nulas B e C tais que $B^3 + C^3 = B + C = A$. Para essas matrizes você garante que o sistema de equações $(B - C)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tem solução $(x, y) \neq (0, 0)$? Justifique.

RESOLUÇÃO:
1.
$$(A+I)^3=(A^2+AI+IA+I^2)(A+I)=(A^2+2A+I)(A+I)=A^3+A^2I+2A^2+2AI+IA+I^2$$
$$=A^3+3A^2+2A+(A+I)=0+(A+I)=A+I$$
2.
Como a matriz A satisfaz a equação (1), então $(A+I)^3=A+I$.
$$B^3+C^3=B+C=A=(A+I)^3-I=(A+I)^3+(-I)^3\Rightarrow B=A+I \text{ e } C=-I$$
Assim, $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

Para que se garanta que o sistema homogêneo $(B-C)\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ possua solução $(x,y)\neq(0,0)$, o sistema deve ser possível e indeterminado. Assim, o determinante da matriz incompleta do sistema deve ser nulo, ou seja, $\det(B-C)=0$.

Como $B-C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \det(B-C)=0$, então o sistema possui solução $(x,y)\neq(0,0)$.

9) (ITA 2003) Sejam A e P matrizes $n\times n$ inversíveis e $B=P^{-1}AP$. Das afirmações:
I. B^T é inversível e $(B^T)^{-1}=(B^{-1})^T$.
II. Se A é simétrica, então B também o é.
III. $\det(A-\lambda I)=\det(B-\lambda I),\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$.
é (são) verdadeira(s):
a) todas b) apenas I. c) apenas I e II. d) apenas I e III. e) apenas II e III.

RESOLUÇÃO: d
Se A e P são inversíveis, então $\det A\neq 0$ e $\det P\neq 0$.

$(*)$ teorema de Binet $(**)$ $\det(P^{-1})=\dfrac{1}{\det P}$

I. VERDADEIRA
$$B=P^{-1}AP\Rightarrow \det B=\det(P^{-1}AP)\overset{(*)}{=}\det(P^{-1})\cdot\det A\cdot\det P\overset{(**)}{=}\frac{1}{\det P}\cdot\det A\cdot\det P=\det A\neq 0$$
$$\Rightarrow \det(B^T)=\det B\neq 0\Rightarrow B^T \text{ é inversível.}$$
Além disso, $(B^{-1})^T\cdot B^T=(B\cdot B^{-1})^T=I^T=I\Rightarrow (B^T)^{-1}=(B^{-1})^T$.
Observe que B^{-1} existe, pois $\det B\neq 0,$ o que implica que B é inversível.
Note também que usamos $(AB)^T=B^TA^T$ e que, se $AB=I$, então $B=A^{-1}$.

II. FALSA

A é simétrica $\Leftrightarrow A^T = A$

Contraexemplo: Sejam a matriz simétrica e inversível $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e a matriz inversível $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $P^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ que não é simétrica.

Note que, se a matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é inversível $(\det M \neq 0)$, então a sua matriz inversa é dada por $M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

III. VERDADEIRA

$B = P^{-1}AP \Leftrightarrow B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda I = P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda P) = P^{-1}(A - \lambda I)P$

$\Rightarrow \det(B - \lambda I) = \det\left[P^{-1}(A - \lambda I)P\right] \overset{(*)}{=} \det\left(P^{-1}\right) \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det P$

$\overset{(**)}{=} \frac{1}{\det P} \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det P = \det(A - \lambda I)$

10) (ITA 2003) O número de todos os valores de $a \in [0, 2\pi]$, distintos, para os quais o sistema nas incógnitas x, y e z é dado por

$$\begin{cases} -4x + y - 6z = \cos 3a \\ x + 2y - 5z = \operatorname{sen} 2a \\ 6x + 3y - 4z = -2\cos a \end{cases}$$

é possível e não-homogêneo, é igual a:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

RESOLUÇÃO: a

O determinante da matriz incompleta é $\det A = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$. Logo, o sistema não é possível e determinado.

Vamos colocar o sistema na forma escalonada:

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = \operatorname{sen} 2a \\ -4x + y - 6z = \cos 3a \\ 6x + 3y - 4z = -2\cos a \end{cases} \overset{(*)}{\sim} \begin{cases} x + 2y - 5z = \operatorname{sen} 2a \\ 9y - 26z = 4\operatorname{sen} 2a + \cos 3a \\ -9y + 26z = -6\operatorname{sen} 2a - 2\cos a \end{cases} \overset{(**)}{\sim} \begin{cases} x + 2y - 5z = \operatorname{sen} 2a \\ 9y - 26z = 4\operatorname{sen} 2a + \cos 3a \\ 0 = -2\operatorname{sen} 2a + \cos 3a - 2\cos a \end{cases}$$

$(*)\ L_2 \to L_2 + 4 \cdot L_1;\ L_3 \to -6 \cdot L_1$ $(**)\ L_3 \to L_3 + L_2$

Para que o sistema seja possível e indeterminado, devemos ter

$0=-2\operatorname{sen}2a+\cos 3a-2\cos a \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}2a-(\cos 3a-\cos a)+\cos a=0$

$\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}2a-(-2\operatorname{sen}2a\operatorname{sen}a)+\cos a=0 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}2a(1+\operatorname{sen}a)+\cos a=0$

$\Leftrightarrow 2\cdot 2\operatorname{sen}a\cos a(1+\operatorname{sen}a)+\cos a=0 \Leftrightarrow \cos a\left(4\operatorname{sen}a+4\operatorname{sen}^2 a+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos a(2\operatorname{sen}a+1)^2=0 \Leftrightarrow \cos a=0 \ \vee\ \operatorname{sen}a=-\dfrac{1}{2}$

$a\in[0,2\pi] \ \wedge\ \cos a=0 \Rightarrow a=\dfrac{\pi}{2} \ \vee\ a=\dfrac{3\pi}{2}$ (ambos não convêm, pois resultam em sist. homogêneo)

$a\in[0,2\pi] \ \wedge\ \operatorname{sen}a=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow a=\dfrac{7\pi}{6} \ \vee\ a=\dfrac{11\pi}{6}$

Logo, há 2 valores de a para os quais o sistema é possível e não-homogêneo.

11) (ITA 2003) Sejam a, b, c e d números reais não-nulos. Exprima o valor do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{bmatrix}$$

na forma de um produto de números reais.

RESOLUÇÃO: $(b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)$

Inicialmente, vamos multiplicar a 1^a linha por a, a 2^a por b, a 3^a por c e a 4^a por d e, posteriormente, colocar $abcd$ em evidência na 1^a coluna.

$$\begin{vmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}=\frac{1}{abcd}\cdot\begin{vmatrix} abcd & a & a^2 & a^3 \\ abcd & b & b^2 & b^3 \\ abcd & c & c^2 & c^3 \\ abcd & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}=\frac{abcd}{abcd}\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}=$$

$=(b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)$

O último determinante calculado é um determinante de Vandermonde.

12) (ITA 2004) Seja $x\in\mathbb{R}$ e a matriz $A=\begin{bmatrix} 2^x & \left(x^2+1\right)^{-1} \\ 2^x & \log_2 5 \end{bmatrix}$. Assinale a opção correta.

a) $\forall x\in\mathbb{R},$ A possui inversa.

b) Apenas para $x>0,$ A possui inversa.

c) São apenas dois os valores de x para os quais A possui inversa.

d) Não existe valor de x para o qual A possui inversa.

e) Para $x=\log_2 5,$ A não possui inversa.

RESOLUÇÃO: a

A matriz A possui inversa se, e somente se, $\det A \neq 0$. Assim, temos:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2^x & \left(x^2+1\right)^{-1} \\ 2^x & \log_2 5 \end{vmatrix} = 2^x \cdot \log_2 5 - 2^x \cdot \left(x^2+1\right)^{-1} = 2^x \cdot \left(\log_2 5 - \frac{1}{x^2+1}\right) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 5 - \frac{1}{x^2+1} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} \neq \log_2 5 \Leftrightarrow x^2+1 \neq \log_5 2 \Leftrightarrow x^2 \neq \log_5 2 - 1 < 0$$

Logo, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\det A = 0$, donde se conclui que $\forall x \in \mathbb{R}$, A possui inversa.

13) (ITA 2004) Considere as afirmações dadas a seguir, em que A é uma matriz quadrada $n \times n$, $n \geq 2$:

I. O determinante de A é nulo se e somente se A possui uma linha ou coluna nula.

II. Se $A = \left(a_{ij}\right)$ é tal que $a_{ij} = 0$ para $i > j$, com $i, j = 1, 2, \ldots, n$, então $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$..

III. Se B for obtida de A, multiplicando-se a primeira coluna por $\sqrt{2}+1$ e a segunda por $\sqrt{2}-1$,, mantendo-se inalteradas as demais colunas, então $\det B = \det A$.

Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s)

a) apenas II. b) apenas III. c) apenas I e II. d) apenas II e III. e) todas.

RESOLUÇÃO: d

I. FALSA

Contraexemplo: Se A não possui linhas ou colunas nulas, mas possui duas linhas iguais, então seu determinante é nulo.

II. VERDADEIRA

A matriz A descrita é uma matriz triangular superior e seu determinante é o produto dos elementos da diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Isso pode ser demonstrado associando a aplicação do teorema de Laplace na primeira coluna e o princípio da indução finita.

III. VERDADEIRA

Multiplicando-se uma linha ou coluna de um determinante por um escalar, o determinante fica multiplicado por esse escalar. Assim, $\det B = \left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right) \cdot \det A = \det A$.

14) (ITA 2004) Assinale a opção que representa o lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano que satisfazem a equação

$$\det \begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 288$$

a) uma elipse. b) uma parábola. c) uma circunferência.

d) uma hipérbole. e) uma reta.

RESOLUÇÃO: c

$$\det\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{(*)}{=} \det\begin{bmatrix} x^2+y^2-34 & x-5 & y-3 & 0 \\ 6 & -3 & 3 & 0 \\ -30 & -3 & -3 & 0 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{(**)}{=} \det\begin{bmatrix} x^2+y^2-34 & x-5 & y-3 \\ 6 & -3 & 3 \\ -30 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$=(-3)\cdot(-3)\cdot\det\begin{bmatrix} x^2+y^2-34 & x-5 & y-3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 10 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=9\cdot\left[\left(x^2+y^2-34\right)-10(x-5)-2(y-3)-10(y-3)+2(x-5)+\left(x^2+y^2-34\right)\right]$$

$$=18\cdot\left(x^2+y^2-34-4x+20-6y+18\right)=18\left(x^2-4x+4+y^2-6y+9-9\right)=288$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2=25$$

$(*) L_1 \to L_1 - L_4; L_2 \to L_2 - L_4; L_3 \to L_3 - L_4$

Logo, o determinante representa uma circunferência de centro $(2,3)$ e raio 5.

Note que o determinante $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$ representa a equação da circunferência que passa pelos pontos (x_1,y_1), (x_2,y_2) e (x_3,y_3).

15) (ITA 2004) Se A é uma matriz real, considere as definições:

I – Uma matriz quadrada A é ortogonal se e só se A for inversível e $A^{-1}=A^t$.

II – Uma matriz quadrada A é diagonal se e só se $a_{ij}=0$, para todo $i, j = 1, 2, \ldots, n$, com $i \neq j$.

Determine as matrizes quadradas de ordem 3 que são, simultaneamente, diagonais e ortogonais.

RESOLUÇÃO: $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, com a, b, c $\in \{-1, 1\}$

Seja a matriz $M_{3\times3}=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ diagonal e ortogonal, então $M^t=M^{-1} \wedge M\cdot M^{-1}=I \Rightarrow M\cdot M^t=I$.

Como M é uma matriz diagonal e, portanto, simétrica, $M^t=M$, logo $M^2=I$.

$$M^2 = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 = c^2 = 1 \Leftrightarrow a, b, c \in \{-1, 1\}$$

16) (ITA 2005) Em uma mesa de uma lanchonete, o consumo de 3 sanduíches, 7 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou $R\$\,31,50.$ Em outra mesa, o consumo de 4 sanduíches, 10 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou $R\$\,42,00.$ Então, o consumo de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta totaliza o valor de:

a) $R\$17,50$ b) $R\$16,50$ c) $R\$12,50$ d) $R\$10,50$ e) $R\$\,9,50$

RESOLUÇÃO: d
Sejam s, c e t os preços em reais do sanduíche, da xícara de café e do pedaço de torta, respectivamente. Assim, temos:

$$\begin{cases} 3s + 7c + t = 31,50 \\ 4s + 10c + t = 42,00 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4s + 10c + t) - (3s + 7c + t) = 42,00 - 31,50 \Leftrightarrow s + 3c = 10,50$$

$$3s + 7c + t = 31,50 \Leftrightarrow s + c + t + 2(s + 3t) = 31,50 \Leftrightarrow s + c + t + 2 \cdot 10,50 = 31,50 \Leftrightarrow s + c + t = 10,50$$

Alternativamente, poderíamos resolver o problema como segue:

$$\begin{cases} 3s + t = 31,50 - 7c \\ 4s + t = 42,00 - 10c \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4s + t) - (3s + t) = (42,00 - 10c) - (31,50 - 7c) \Leftrightarrow s = 10,50 - 3c$$

$$\Rightarrow 3s + t = 31,50 - 7c \Rightarrow 3 \cdot (10,50 - 3c) + t = 31,50 - 7c \Leftrightarrow t = 2c$$

$$\Rightarrow s + c + t = (10,50 - 3c) + c + 2c = 10,50$$

17) (ITA 2005) O sistema linear $\begin{cases} bx + y = 1 \\ by + z = 1 \\ x + bz = 1 \end{cases}$ não admite solução se e somente se o número real b for igual a:

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) -2

RESOLUÇÃO: a
Se o sistema $\begin{cases} bx + y = 1 \\ by + z = 1 \\ x + bz = 1 \end{cases}$ é impossível, então o determinante da matriz incompleta A do sistema é nulo.

$$\det A = \begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow b^3 + 1 = 0 \overset{b \in \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} b = -1$$

Se $b=-1$, o sistema resultante é

$$\begin{cases} -x+y=1 \\ -y+z=1 \\ x-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=1 \\ -y+z=1 \\ -x+y=1 \quad (L_3+L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=1 \\ -y+z=1 \\ y-z=2 \quad (L_3+L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=1 \\ -y+z=1 \\ 0=3 \end{cases}.$$

Analisando a forma escalonada do sistema, conclui-se que o sistema é impossível se, e somente se, $b=-1$.

Note que, se $b \neq -1$, o sistema é possível e determinado.

18) (ITA 2005) Sejam A e B matrizes 2×2 tais que $AB=BA$ e que satisfazem à equação matricial $A^2+2AB-B=0$. Se B é inversível, mostre que: (a) $AB^{-1}=B^{-1}A$ e que (b) A é inversível.

RESOLUÇÃO:

(a)

Se B é inversível, então existe B^{-1} tal que $B \cdot B^{-1}=B^{-1} \cdot B=I$, onde I é a matriz identidade de ordem 2. Assim, temos:

$$AB=BA \Leftrightarrow AB \cdot B^{-1}=BA \cdot B^{-1} \Leftrightarrow A \cdot I=BAB^{-1} \Leftrightarrow A=BAB^{-1}$$

$$\Leftrightarrow B^{-1} \cdot A=B^{-1} \cdot BAB^{-1} \Leftrightarrow B^{-1}A=I \cdot AB^{-1} \Leftrightarrow B^{-1}A=AB^{-1} \quad \text{(C.Q.D.)}$$

(b)

$$A^2+2AB-B=0 \Leftrightarrow B=A \cdot (A+2B) \Rightarrow \det B=\det[A \cdot (A+2B)] \overset{(*)}{=} \det A \cdot \det(A+2B)$$

$$B \text{ é inversível } \Leftrightarrow \det B \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ é inversível} \quad \text{(C.Q.D.)}$$

$(*)$ teorema de Binet

Note que é possível identificar a matriz inversa de A como segue:

$$A^2+2AB-B=0 \Leftrightarrow A^2+AB+AB-B=0 \Leftrightarrow A^2+AB+BA-B=0 \Leftrightarrow A^2+AB=B-BA$$

$$\Leftrightarrow A(A+B)=B(I-A) \Leftrightarrow B^{-1} \cdot A(A+B)=B^{-1} \cdot B(I-A) \Leftrightarrow B^{-1}A(A+B)=I(I-A)$$

$$\Leftrightarrow B^{-1}A(A+B)=I-A \Leftrightarrow B^{-1}A(A+B)+A=I \overset{(a)}{\Leftrightarrow} AB^{-1}(A+B)+A=I$$

$$\Leftrightarrow A \cdot [B^{-1}(A+B)+I]=I \Leftrightarrow A^{-1}=B^{-1}(A+B)+I$$

19) (ITA 2006) A condição necessária para que as constantes reais a e b tornem incompatível o sistema linear $\begin{cases} x+y+3z=2 \\ x+2y+5z=1 \\ 2x+2y+az=b \end{cases}$ é:

a) $a-b \neq 2$ b) $a+b=10$ c) $4a-6b=0$ d) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{2}$ e) $a \cdot b=24$

RESOLUÇÃO: a

$$\begin{cases} x+y+3z=2 \\ x+2y+5z=1 \quad (L_2-L_1) \\ 2x+2y+az=b \quad (L_3-2 \cdot L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3z=2 \\ y+2z=1 \\ (a-6) \cdot z=b-4 \end{cases}$$

O sistema acima está na forma escalonada. O sistema é incompatível se, e somente se, $a-6=0 \Leftrightarrow a=6$ e $b-4\neq 0 \Leftrightarrow b\neq 4$.
A condição $a-b\neq 2$ é uma condição necessária, mas não suficiente para que o sistema seja incompatível.

Observação: Foi acrescentada a palavra "necessária" no enunciado para tornar a questão correta, pois a mesma foi anulada originalmente.

20) (ITA 2006) Se $\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix}=-1,$ então o valor do $\det\begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$ é igual a:

a) 0 b) 4 c) 8 d) 12 e) 16

RESOLUÇÃO: d

$$\det\begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}\overset{(1)}{=}(-2)\cdot 3\cdot\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ x & y & z \end{bmatrix}\overset{(2)}{=}-6\cdot\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ 2p & 2q & 2r \\ x & y & z \end{bmatrix}$$

$$\overset{(3)}{=}(-6)\cdot 2\cdot\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix}=-12\cdot(-1)=12$$

(1) Coloca-se -2 em evidência na primeira linha e 3 em evidência na terceira linha.
(2) Subtrai-se a terceira linha da segunda linha.
(3) Coloca-se 2 em evidência na segunda linha.

21) (ITA 2006) Seja o sistema linear nas incógnitas x e y, com a e b reais, dado por

$$\begin{cases}(a-b)x-(a+b)y=1 \\ (a+b)x+(a-b)y=1\end{cases}.$$

Considere as seguintes afirmações:

I – O sistema é possível e indeterminado se $a=b=0$.
II – O sistema é possível e determinado se a e b não são simultaneamente nulos.
III – $x^2+y^2=\left(a^2+b^2\right)^{-1}$, se $a^2+b^2\neq 0$.

Então, pode-se afirmar que é(são) verdadeira(s) apenas:

a) I b) II c) III d) I e II e) II e III

RESOLUÇÃO: e

O determinante da matriz incompleta do sistema é

$$\det A=\begin{vmatrix}(a-b) & -(a+b) \\ (a+b) & (a-b)\end{vmatrix}=(a-b)^2+(a+b)^2=2\left(a^2+b^2\right).$$

I – Falsa

Se $a=b=0,$ o sistema se reduz a $\begin{cases}0x+0y=1 \\ 0x+0y=1\end{cases}$ que é impossível.

II – Verdadeira
Se a e b não são simultaneamente nulos, então $\det A \neq 0$ e o sistema é possível e determinado.
III – Verdadeira
Se $a^2 + b^2 \neq 0,$ então a e b não são simultaneamente nulos e o sistema é possível e determinado. A solução desse sistema é $x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -(a+b) \\ 1 & (a-b) \end{vmatrix}}{2(a^2+b^2)} = \frac{a}{a^2+b^2}$ e $y = \frac{\begin{vmatrix} (a-b) & 1 \\ (a+b) & 1 \end{vmatrix}}{2(a^2+b^2)} = \frac{-b}{a^2+b^2}$, que satisfaz $x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{1}{a^2+b^2} = (a^2+b^2)^{-1}.$

22) (ITA 2006) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1/2 & 5 \end{bmatrix}$. Determine o elemento c_{34} da matriz $C = (A+B)^{-1}$.

RESOLUÇÃO:
$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A+B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \det\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 9 \cdot 11 = 99$$
$$C = (A+B)^{-1} = \frac{1}{\det(A+B)} \cdot \left((A+B)'\right)^t$$
$$c_{34} = \frac{1}{\det(A+B)} \cdot \left((A+B)'\right)^t_{34} = \frac{1}{\det(A+B)} \cdot (A+B)'_{43} = \frac{1}{99} \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{2}{11}$$
onde $(A+B)'$ é a matriz dos cofatores da matriz $(A+B)$.

23) (ITA 2007) Sejam $A = (a_{jk})$ e $B = (b_{jk})$, duas matrizes quadradas $n \times n$, onde a_{jk} e b_{jk} são, respectivamente, os elementos da linha j e coluna k das matrizes A e B, definidos por $a_{jk} = \binom{j}{k}$, quando $j \geq k$, $a_{jk} = \binom{k}{j}$, quando $j < k$, e $b_{jk} = \sum_{p=0}^{jk} (-2)^p \binom{jk}{p}$.
O traço de uma matriz quadrada (c_{jk}) de ordem $n \times n$ é definido por $\sum_{p=1}^{n} c_{pp}$. Quando n for ímpar, o traço de $A + B$ é igual a

a) $\frac{n(n-1)}{3}$ b) $\frac{(n-1)(n+1)}{4}$ c) $\frac{(n^2-3n+2)}{(n-2)}$ d) $\frac{3\cdot(n-1)}{n}$ e) $\frac{(n-1)}{n-2}$

RESOLUÇÃO: c

Seja $C = A + B$, com $C = (c_{jk})_{n\times n}$, então $c_{jk} = a_{jk} + b_{jk}$.

$$\operatorname{tr}(C) = \sum_{k=1}^{n} c_{kk} = \sum_{k=1}^{n}(a_{kk} + b_{kk}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} + \sum_{k=1}^{n} b_{kk}$$

$$a_{kk} = \binom{k}{k} = 1$$

$$b_{kk} = \sum_{p=0}^{k^2}(-2)^p\binom{k^2}{p} = \sum_{p=0}^{k^2}\binom{k^2}{p}(-2)^p\cdot 1^{k^2-p} = (1-2)^{k^2} = (-1)^{k^2}$$

$$\operatorname{tr}(C) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} + \sum_{k=1}^{n} b_{kk} = \sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k^2} = n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k^2}$$

Como n é ímpar, então $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k^2} = -1$ e $\operatorname{tr}(C) = n - 1 = \dfrac{n-3n+2}{n-2}$.

Note que, como n é ímpar, o denominador não se anula.

24) (ITA 2008) Considere o sistema $Ax = b$, em que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } k \in \mathbb{R}.$$

Sendo T a soma de todos os valores de k que tornam o sistema impossível e sendo S a soma de todos os valores de k que tornam o sistema possível e indeterminado, então o valor de $T - S$ é

a) -4 b) -3 c) 0 d) 1 e) 4

RESOLUÇÃO: a

Uma condição necessária para que o sistema seja possível e indeterminado ou impossível é $\det A = 0$.

$$\det A = k(k-3) + 12 + 18 + 3k + 4(k-3) - 18 = k^2 + 4k = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = -4$$

Para $k = 0$, temos:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 6z = 6 & (L_2 - 2\cdot L_1) \\ -x + 3y - 3z = 0 & (L_3 + L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 4y = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Logo, o sistema é possível e indeterminado.

Para $k = -4$ temos

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - 4y + 6z = 6 & (L_2 - 2\cdot L_1) \\ -x + 3y - 7z = 0 & (L_3 + L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 0 = 4 \\ y - 4z = 1 \end{cases}$$

Logo, o sistema é impossível.

Assim, $T = -4$ e $S = 0$, donde $T - S = (-4) - 0 = -4$.

25) (ITA 2008) Sejam A e C matrizes $n\times n$ inversíveis tais que $\det\left(I+C^{-1}A\right)=\frac{1}{3}$ e $\det A=5$. Sabendo-se que $B=3\left(A^{-1}+C^{-1}\right)^t$, então o determinante de B é igual a

a) 3^n b) $2\cdot\frac{3^n}{5^2}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3^{n-1}}{5}$ e) $5\cdot 3^{n-1}$

RESOLUÇÃO: d

$$\det\left(I+C^{-1}A\right)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\det\left(A^{-1}A+C^{-1}A\right)=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\det\left(\left(A^{-1}+C^{-1}\right)A\right)=\frac{1}{3}\overset{\text{Teo.Binet}}{\Leftrightarrow}\det\left(A^{-1}+C^{-1}\right)\cdot\det A=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\det\left(A^{-1}+C^{-1}\right)\cdot 5=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\det\left(A^{-1}+C^{-1}\right)=\frac{1}{15}$$

$$B=3\left(A^{-1}+C^{-1}\right)^t\Rightarrow\det B=\det\left[3\left(A^{-1}+C^{-1}\right)^t\right]\Leftrightarrow\det B=3^n\cdot\det\left(A^{-1}+C^{-1}\right)^t$$

$$\Leftrightarrow\det B=3^n\cdot\det\left(A^{-1}+C^{-1}\right)\Leftrightarrow\det B=3^n\cdot\frac{1}{15}\Leftrightarrow\det B=\frac{3^{n-1}}{5}$$

26) (ITA 2008) Uma matriz real quadrada A é ortogonal se A é inversível e $A^{-1}=A^t$. Determine todas as matrizes 2×2 que são simétricas e ortogonais, expressando-as, quando for o caso, em termos de seus elementos que estão fora da diagonal principal.

RESOLUÇÃO: $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$; $A=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ e $A=\begin{bmatrix}\pm\sqrt{1-b^2}&b\\b&\mp\sqrt{1-b^2}\end{bmatrix}$, onde $b\in[-1,1]$.

A é ortogonal $\Rightarrow A^{-1}=A^t\Rightarrow A^t\cdot A=I$ (1)

A é simétrica $\Rightarrow A^t=A$ (2)

(1) e (2): $A\cdot A=I\Leftrightarrow A^2=I$ (3)

Seja a matriz simétrica e ortogonal 2×2, $A=\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}$, então de (3) temos:

$$\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}a^2+b^2&ab+bc\\ab+bc&b^2+c^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=1\\ab+bc=0\\b^2+c^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=1\\b(a+c)=0\\b^2+c^2=1\end{cases}$$

Da segunda equação, temos $b=0$ ou $a+c=0$.

$b=0\Rightarrow a=\pm 1\ \wedge\ c=\pm 1$

$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ ou $A=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ ou $A=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$ ou $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

$a+c=0\Leftrightarrow a=-c\Rightarrow a^2=1-b^2\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{1-b^2}\ \wedge\ c=\mp\sqrt{1-b^2}$, onde $b\in[-1,1]$

$$A=\begin{bmatrix}\sqrt{1-b^2} & b\\ b & -\sqrt{1-b^2}\end{bmatrix} \text{ ou } A=\begin{bmatrix}-\sqrt{1-b^2} & b\\ b & \sqrt{1-b^2}\end{bmatrix}$$

Note que, quando $b=0,$ temos as duas últimas matrizes do caso anterior.
Assim, as matrizes que satisfazem às condições do enunciado são:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix};\ A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \text{ e } A=\begin{bmatrix}\pm\sqrt{1-b^2} & b\\ b & \mp\sqrt{1-b^2}\end{bmatrix}, \text{ onde } b\in[-1,1].$$

27) (ITA 2009) Dados $A\in M_{3x2}(\mathbb{R})$ e $b\in M_{3x1}(\mathbb{R}),$ dizemos que $X_0\in M_{2x1}(\mathbb{R})$ é a melhor aproximação quadrática do sistema $AX=b$ quando $\sqrt{(AX_0-b)^t(AX_0-b)}$ assume o menor valor possível. Então, dado o sistema

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

A sua melhor aproximação quadrática é

a) $\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}-2\\ 0\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$

RESOLUÇÃO: e

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \wedge X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \wedge b=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\Rightarrow AX=\begin{bmatrix}-x\\ y\\ x\end{bmatrix}\Rightarrow AX-b=\begin{bmatrix}-x-1\\ y-1\\ x-1\end{bmatrix}$$

$$(AX-b)^t\cdot(AX-b)=\begin{bmatrix}(-x-1) & (y-1) & (x-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-x-1\\ y-1\\ x-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(x+1)^2+(y-1)^2+(x-1)^2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2x^2+2+(y-1)^2\end{bmatrix}$$

Observe que $(AX-b)^t\cdot(AX-b)$ é uma matriz $1\times1,$ logo pode ser tratada como um escalar.

$$\Rightarrow\sqrt{(AX-b)^t(AX-b)}=\sqrt{2x^2+2+(y-1)^2}$$

Essa expressão assume seu valor mínimo quando $x=0$ e $y=1,$, então $X_0=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}.$

28) (ITA 2009) O sistema $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$, $a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 \in \mathbb{R}$, com $(c_1,c_2)\neq(0,0)$, $a_1c_1+a_2c_2=b_1c_1+b_2c_2=0$, é

a) determinado

b) determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$.

c) determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$ ou $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$.

d) impossível.

e) indeterminado.

RESOLUÇÃO: d

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1c_1x+b_1c_1y=c_1^2 \\ a_2c_2x+b_2c_2y=c_2^2 \end{cases}$$

Somando as duas equações, temos:

$$(a_1c_1+a_2c_2)x+(b_1c_1+b_2c_2)y=c_1^2+c_2^2$$

Do enunciado, tem-se $a_1c_1+a_2c_2=b_1c_1+b_2c_2=0 \Rightarrow c_1^2+c_2^2=0 \Leftrightarrow c_1=c_2=0$, o que contradiz a hipótese $(c_1,c_2)\neq(0,0)$. Logo, o sistema é impossível.

29) (ITA 2009) Seja $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e não nula, cujos elementos são tais que a_{11}, a_{12} e a_{22} formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e $\text{tr}A = 5a_{11}$. Sabendo-se que o sistema $AX = X$ admite solução não nula $X \in M_{2\times1}(\mathbb{R})$, pode-se afirmar que $a_{11}^2+q^2$ é igual a

a) $\frac{101}{25}$ b) $\frac{121}{25}$ c) 5 d) $\frac{49}{9}$ e) $\frac{25}{4}$

RESOLUÇÃO: a

PG (a_{11},a_{12},a_{22}) de razão $q \neq 1 \Rightarrow a_{12}=a_{11}q \wedge a_{22}=a_{11}q^2$

$A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ é uma matriz simétrica $\Leftrightarrow a_{21}=a_{12}$

$\text{tr}A = 5a_{11} \Leftrightarrow a_{11}+a_{22}=5a_{11} \Leftrightarrow a_{11}q^2=4a_{11} \Leftrightarrow q^2=4$

Note que como a matriz A é não nula, então $a_{11}\neq 0$.

$AX = X \Leftrightarrow (A-I)X=0_{2\times1}$ é um sistema homogêneo que admite solução não nula e, portanto, é possível e indeterminado. Assim, temos: $\det(A-I)=0$.

$$\det(A-I)=\begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{11}q \\ a_{11}q & a_{11}q^2-1 \end{vmatrix}=(a_{11}-1)(a_{11}q^2-1)-a_{11}^2q^2=-a_{11}-a_{11}q^2+1$$

$$=-5a_{11}+1=0 \Leftrightarrow a_{11}=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow a_{11}^2+q^2=\left(\frac{1}{5}\right)^2+4=\frac{101}{25}.$$

30) (ITA 2009) Sejam $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Mostre as propriedades abaixo:

a) Se AX é a matriz coluna nula, para todo $X \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$, então A é a matriz nula.

b) Se A e B são não nulas e tais que AB é a matriz nula, então $\det A = \det B = 0$.

RESOLUÇÃO:
a)

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, como $AX = 0_{3\times 1}$, $\forall X \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$, então

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a_{11} = a_{21} = a_{31} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a_{12} = a_{22} = a_{32} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0.$$

Logo, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Supondo que $\det A \neq 0$, então existe A^{-1}.

$AB = 0 \Leftrightarrow A^{-1} \cdot AB = A^{-1} \cdot 0 \Leftrightarrow I \cdot B = 0 \Leftrightarrow B = 0$ (ABSURSO, pois $B \neq 0$)
Logo, $\det A = 0$ e, analogamente, conclui-se que $\det B = 0$.
Note que essa proposição estabelece que se uma matriz é um divisor da matriz nula, então o seu determinante é nulo.

31) (ITA 2010) Um polinômio real $p(x) = \sum_{n=0}^{5} a_n x^n$, com $a_5 = 4$, tem três raízes reais distintas, a, b e c, que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ a + 4b + 2c = 6 \\ 2a + 2b + 2c = 5 \end{cases}$$

Sabendo que a maior das raízes é simples e as demais têm multiplicidade dois, pode-se afirmar que $p(1)$ é igual a

a) -4. b) -2. c) 2. d) 4. e) 6.

RESOLUÇÃO: a

Escalonando a matriz completa do sistema, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 + L_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -11 & 11 \end{pmatrix}$$

Assim, $c = -1$, $2b + 3 = 6 \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$ e $a + 3 - 5 = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

A maior raiz é $a = 2$, que tem multiplicidade 1 e as outras raízes são $b = \frac{3}{2}$ e $c = -1$ que possuem multiplicidade 2.

Como $a_5 = 4$ é o coeficiente líder do polinômio $p(x)$, então

$$p(x) = 4(x-2)\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 (x+1)^2 \text{ e } p(1) = 4 \cdot (1-2) \cdot \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot (1+1)^2 = -4.$$

32) (ITA 2010) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix} \in M_{3x3}(\mathbb{R}),$$

em que $a_4 = 10$, $\det A = -1000$ e a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6 formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $d > 0$. Pode-se afirmar que $\frac{a_1}{d}$ é igual a

a) -4 b) -3 c) -2 d) -1 e) 1

RESOLUÇÃO: d

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ é uma PA de razão d $\Rightarrow a_1 = a_4 - 3d$ e $a_6 = a_4 + 2d$

A é matriz triangular superior $\Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_4 \cdot a_6 = -1000$

Assim, temos:

$$(10 - 3d) \cdot 10 \cdot (10 + 2d) = -1000 \Leftrightarrow 3d^2 + 5d - 100 = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{20}{3} \vee d = 5$$

$$d > 0 \Rightarrow d = 5 \Rightarrow a_1 = a_4 - 3d = 10 - 3 \cdot 5 = -5 \Rightarrow \frac{a_1}{d} = \frac{-5}{5} = -1$$

33) (ITA 2010) Sobre os elementos da matriz

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{4x4}\ (\mathbb{R})$$

sabe-se que (x_1, x_2, x_3, x_4) e (y_1, y_2, y_3, y_4) são duas progressões geométricas de razão 3 e 4 e de soma 80 e 255, respectivamente. Então, $\det(A^{-1})$ e o elemento $(A^{-1})_{23}$ valem, respectivamente,

a) $\frac{1}{72}$ e 12. b) $-\frac{1}{72}$ e -12. c) $-\frac{1}{72}$ e 12. d) $-\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$. e) $\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$.

RESOLUÇÃO: c

$x_2 = 3x_1,\ x_3 = 9x_1,\ x_4 = 27x_1 \Rightarrow x_1 + 3x_1 + 9x_1 + 27x_1 = 80 \Leftrightarrow 40x_1 = 80 \Leftrightarrow x_1 = 2$

$y_2 = 4y_1,\ y_3 = 16y_1,\ y_4 = 64y_1 \Rightarrow y_1 + 4y_1 + 16y_1 + 64y_1 = 255 \Leftrightarrow 85y_1 = 255 \Leftrightarrow y_1 = 3$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 18 & 54 \\ 3 & 12 & 48 & 192 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 18 & 54 \\ 3 & 12 & 48 & 192 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 6 & 18 & 54 \\ 12 & 48 & 192 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -72 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = -\frac{1}{72}$$

onde o determinante foi calculado aplicando-se o teorema de Laplace, na última linha.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A')^t \Rightarrow (A^{-1})_{23} = \frac{1}{\det A} \cdot (A')^t{}_{23} = \frac{1}{\det A} \cdot (A')_{32} = -\frac{1}{72} \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 18 & 54 \\ 3 & 48 & 192 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

onde A' é a matriz dos cofatores da matriz A.

34) (ITA 2010) Considere as matrizes $A \in M_{4x4}(\mathbb{R})$ e $M_{4x1}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & b & 1 \\ b & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -a & 2 & b & 1 \end{bmatrix};\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

a) Encontre todos os valores reais de a e b tais que a equação $AX = B$ tenha solução única.

b) Se $a^2 - b^2 = 0,\ a \neq 0$ e $B = [11\ 2\ 4]^t$, encontre X tal que $AX = B$.

RESOLUÇÃO:

a) Para que o sistema $AX = B$ tenha solução única, devemos ter $\det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & b & 1 \\ b & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -a & 2 & b & 1 \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & a & 0 \\ -a & b & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \left(a^2 + b^2 + a^2 - b^2\right) = -4a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$$

$(*)$ teorema de Laplace na terceira linha do determinante.

Logo, para que a equação $AX = B$ tenha solução única, devemos ter $a \neq 0$ e b um número real qualquer.

b)

Escrevendo a equação matricial na forma de um sistema linear, temos:

$$\begin{cases} ax + y + bz + w = 1 \\ bx + y + az = 1 \\ 2y = 2 \\ -ax + 2y + bz + w = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ ax + 1 + bz + w = 1 \\ bx + 1 + az = 1 \\ -ax + 2 \cdot 1 + bz + w = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ ax + bz + w = 0 \\ bx + az = 0 \\ -ax + bz + w = 2 \end{cases}$$

$$\overset{(L_4 - L_2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = 1 \\ ax + bz + w = 0 \\ bx + az = 0 \\ -2ax = 2 \end{cases} \overset{(a \neq 0)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = 1 \\ x = -1/a \\ z = (-b/a) \cdot (-1/a) = b/a^2 \\ w = -a \cdot (-1/a) - b \cdot (b/a^2) = (a^2 - b^2)/a^2 \end{cases}$$

$$a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow w = 0 \ \wedge \ z = \frac{b}{a^2} = \frac{b}{b^2} = \frac{1}{b} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}^t$$

35) (ITA 2011) O sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ y + 2z = b \\ 3x - y - 5cz = 0 \end{cases}$

a) é possível, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) é possível quando $a = \frac{7b}{3}$ ou $c \neq 1$.

c) é impossível quando $c = 1$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

d) é impossível quando $a \neq \frac{7b}{3}$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

e) é possível quando $c = 1$ e $a \neq \frac{7b}{3}$.

RESOLUÇÃO: b

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ y + 2z = b \\ 3x - y - 5cz = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ y + 2z = b \\ -7y + (-5c - 9)z = -3a \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ y + 2z = b \\ 5(1 - c)z = -3a + 7b \end{cases}$$

Se $1 - c \neq 0 \Leftrightarrow c \neq 1$, então o sistema é possível e determinado.

Se $1-c=0 \Leftrightarrow c=1$ e $-3a+7b=0 \Leftrightarrow a=\frac{7b}{3}$, então o sistema é possível e indeterminado.

Se $1-c=0 \Leftrightarrow c=1$ e $-3a+7b\neq 0 \Leftrightarrow a\neq\frac{7b}{3}$, então o sistema é impossível.

Logo, o sistema é possível quando $a=\frac{7b}{3}$ ou $c\neq 1$.

36) (ITA 2011) Considere as afirmações abaixo:

I. Se M é uma matriz quadrada de ordem $n>1$, não–nula e não–inversível, então existe matriz não–nula N, de mesma ordem, tal que $M\cdot N$ é matriz nula.

II. Se M é uma matriz quadrada inversível de ordem n tal que $\det\left(M^2-M\right)=0$, então existe matriz não–nula X, de ordem $n\times 1$, tal que $MX=X$.

III. A matriz $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta} & 1-2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ é inversível, $\forall\theta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Destas, é(são) verdadeira(s):

a) apenas II. b) apenas I e II. c) apenas I e III. d) apenas II e III. e) todas.

RESOLUÇÃO: e

I – VERDADEIRA

Como M é não inversível, o sistema linear homogêneo $M\cdot X_{n\times 1}=0_{n\times 1}$, onde $0_{n\times 1}$ representa a matriz nula $n\times 1$ é possível e indeterminado, logo admite pelo menos uma solução X_1 não nula.

Basta tomar a matriz $N_{n\times n}$ cujas colunas são todas iguais a X_1, e teremos $M\cdot N=0_{n\times n}$ e N não nula.

II – VERDADEIRA

Se M é uma matriz inversível de ordem n, então $\det M\neq 0$.

$$\det\left(M^2-M\right)=0 \Leftrightarrow \det\left[M\left(M-I_n\right)\right]=0 \Leftrightarrow \det M\cdot\det\left(M-I_n\right)=0 \Leftrightarrow \det\left(M-I_n\right)=0$$

Isso implica que 1 é autovalor de M, logo existe $X_{n\times 1}$ não nula tal que $M\cdot X=1\cdot X \Leftrightarrow M\cdot X=X$.

III – VERDADEIRA

Se $\theta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$, então $\operatorname{tg}\theta$ e $\sec\theta$ estão definidos.

$$\det\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta} & 1-2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}=\cos\theta\cdot\left(1-2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)-\left(-\operatorname{sen}\theta\right)\cdot\frac{\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta}=\cos\theta\cdot\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\cdot\operatorname{sen}\theta=$$

$$=\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta=1\neq 0$$

Logo, a matriz é inversível.

37) (ITA 2011) Determine todas as matrizes $M \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ tais que $MN = NM$, $\forall N \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

RESPOSTA: $M = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \cdot I_{2\times2}$, onde $I_{2\times2}$ é a matriz identidade de ordem 2 e $\lambda \in \mathbb{R}$.

RESOLUÇÃO:

Sejam $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, então

$$MN = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix}$$

$$NM = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+cw & bz+dw \end{bmatrix}$$

$$MN = NM,\ \forall N \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \Rightarrow \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+cw & bz+dw \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax+bz = ax+cy \Leftrightarrow bz = cy \\ ay+bw = bx+dy \Leftrightarrow bx+(d-a)y-bw = 0 \\ cx+dz = az+cw \Leftrightarrow cx+(d-a)z-cw = 0 \\ cy+dw = bz+dw \Leftrightarrow cy = bz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c = 0 \\ a = d \end{cases}$$

Logo, as matrizes são $M = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \cdot I_{2\times2}$, onde $I_{2\times2}$ é a matriz identidade de ordem 2 e $\lambda \in \mathbb{R}$.

38) (ITA 2012) Considere a matriz quadrada A em que os termos da diagonal principal são 1, $1+x_1$, $1+x_2$, $\ldots$, $1+x_n$ e todos os outros termos são iguais a 1. Sabe-se que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e a razão é 4. Determine a ordem da matriz A para que o seu determinante seja igual a 256.

RESOLUÇÃO:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{vmatrix} (1+x_1)-1\cdot1 & 1-1\cdot1 & \cdots & 1-1\cdot1 \\ 1-1\cdot1 & (1+x_2)-1\cdot1 & \cdots & 1-1\cdot1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-1\cdot1 & 1-1\cdot1 & \cdots & (1+x_n)-1\cdot1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 256$$

$(*)$ Regra de Chió

O produto dos termos da progressão geométrica $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de primeiro termo $x_1 = \frac{1}{2}$ e a razão $q = 4$ é $P_n = (x_1 \cdot x_n)^{\frac{n}{2}} = (x_1^2 \cdot q^{n-1})^{\frac{n}{2}} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4^{n-1}\right]^{\frac{n}{2}} = (2^{2n-4})^{\frac{n}{2}} = 2^{(n-2)n} = 2^{n^2-2n}$.

Assim, temos: $2^{n^2-2n} = 256 = 2^8 \Leftrightarrow n^2 - 2n = 8 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 8 = 0 \Leftrightarrow n = -2(\text{não convém}) \vee n = 4$.
Logo, a ordem da matriz A é $n + 1 = 4 + 1 = 5$.

39) (ITA 2012) Seja n um número natural. Sabendo que o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} n & \log_2 2 & -\log_2 \frac{1}{2} \\ n+5 & \log_3 3^n & \log_3 243 \\ -5 & \log_5 \frac{1}{125} & -\log_5 25 \end{bmatrix}$$

é igual a 9, determine n e também a soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa A^{-1}.

RESOLUÇÃO: 3 e -1

$$\det A = \begin{vmatrix} n & \log_2 2 & -\log_2 \frac{1}{2} \\ n+5 & \log_3 3^n & \log_3 243 \\ -5 & \log_5 \frac{1}{125} & -\log_5 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 \\ n+5 & n & 5 \\ -5 & -3 & -2 \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{vmatrix} n-2 & 1 & 1 \\ 0 & n & 5 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (n-2)\begin{vmatrix} n & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = (n-2)(-2n+15) = 9 \Leftrightarrow 2n^2 - 19n + 39 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{13}{2} \vee n = 3$$

$(*)$ $C_1 \to (C_1 - C_2 - C_3)$, onde C_k é a k-ésima coluna do determinante.

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 3 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Seja $(X)_{ij}$ o elemento da linha i e coluna j, X^t a matriz transposta e X' a matriz dos cofatores, respectivamente, de uma matriz X.

$$(A^{-1})_{11} = \frac{1}{\det A} \cdot ((A')^t)_{11} = \frac{1}{\det A} \cdot (A')_{11} = \frac{1}{9} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \cdot 9 = 1$$

$$(A^{-1})_{21} = \frac{1}{\det A} \cdot ((A')^t)_{21} = \frac{1}{\det A} \cdot (A')_{12} = \frac{1}{9} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} \cdot 9 = -1$$

$$(A^{-1})_{31} = \frac{1}{\det A} \cdot ((A')^t)_{31} = \frac{1}{\det A} \cdot (A')_{13} = \frac{1}{9} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \cdot (-9) = -1$$

Logo, a soma dos elementos da primeira coluna da matriz A^{-1} é $(A^{-1})_{11} + (A^{-1})_{21} + (A^{-1})_{31} = 1 + (-1) + (-1) = -1$.

Note que os elementos da primeira coluna da matriz A^{-1} são os cofatores da primeira linha da matriz A divididos pelo determinante de A.

40) (ITA 2013) Considere $A \in M_{5\times 5}(\mathbb{R})$ com $\det(A)=\sqrt{6}$ e $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Se $\det\left(\alpha A^t A A^t\right)=\sqrt{6}\,\alpha^2$, o valor de α é

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ c) $\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$ d) 1 e) $\sqrt{216}$

RESOLUÇÃO: c

A matriz $A^t A A^t$ é de ordem 5 e, portanto, o determinante de um escalar vezes essa matriz é igual ao escalar elevado à quinta potência multiplicado pelo determinante da matriz. Assim, temos:

$$\det\left(\alpha A^t A A^t\right)=\sqrt{6}\,\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^5\cdot\det\left(A^t A A^t\right)=\sqrt{6}\,\alpha^2 \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} \det\left(A^t A A^t\right)=\frac{\sqrt{6}}{\alpha^3}.$$

Considerando o teorema de Binet e também que $\det\left(A^t\right)=\det A,$ temos:

$$\det\left(A^t A A^t\right)=\frac{\sqrt{6}}{\alpha^3} \Leftrightarrow \det\left(A^t\right)\cdot\det A\cdot\det\left(A^t\right)=\frac{\sqrt{6}}{\alpha^3} \Leftrightarrow \det A\cdot\det A\cdot\det A=\frac{\sqrt{6}}{\alpha^3} \Leftrightarrow (\det A)^3=\frac{\sqrt{6}}{\alpha^3}.$$

Como $\det A=\sqrt{6},$ temos $(\det A)^3=\frac{\sqrt{6}}{\alpha^3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{6}\right)^3=\frac{\sqrt{6}}{\alpha^3} \Leftrightarrow \alpha^3=\frac{1}{6} \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{\sqrt[3]{6}}=\frac{\sqrt[3]{36}}{6}.$

41) (ITA 2013) Considere o sistema nas variáveis reais x e y:

$$\begin{cases} x\,\mathrm{sen}\,\alpha+3y\cos\alpha=a \\ x\cos\alpha+y\,\mathrm{sen}\,\alpha=b \end{cases},$$

com $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ e $a,b\in\mathbb{R}$. Analise para que valores de α, a e b o sistema é (i) possível determinado, (ii) possível indeterminado ou (iii) impossível, respectivamente. Nos casos (i) e (ii), encontre o respectivo conjunto solução.

RESOLUÇÃO:

Vamos escalonar o sistema: $\begin{cases} x\,\mathrm{sen}\,\alpha+3y\cos\alpha=a \\ x\cos\alpha+y\,\mathrm{sen}\,\alpha=b \end{cases}.$

Substituindo a segunda equação pela primeira multiplicada por $\cos\alpha$ menos a segunda multiplicada por $\mathrm{sen}\,\alpha,$ vem:

$$\begin{cases} x\,\mathrm{sen}\,\alpha+3y\cos\alpha=a \\ y\left(3\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)=a\cos\alpha-b\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$$

Para explicitar x, podemos, no sistema inicial, somar a primeira equação multiplicada por $\mathrm{sen}\,\alpha$ com a segunda multiplicada por $(-3\cos\alpha)$. Assim, $\left(\mathrm{sen}^2\,\alpha-3\cos^2\alpha\right)x=a\,\mathrm{sen}\,\alpha-3b\cos\alpha.$

(i) sistema possível e determinado

$$3\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\,\alpha\neq 0 \Leftrightarrow 3\cos^2\alpha-\left(1-\cos^2\alpha\right)\neq 0 \Leftrightarrow 4\cos^2\alpha-1\neq 0 \Leftrightarrow \cos^2\alpha\neq\frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos\alpha\neq\pm\frac{1}{2}$$

$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{3}$

O conjunto solução é dado por $x = \frac{a \operatorname{sen} \alpha - 3b \cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha}$ e $y = \frac{a \cos \alpha - b \operatorname{sen} \alpha}{3\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}$.

(ii) possível indeterminado

$3\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = 0 \Leftrightarrow 3\cos^2 \alpha - \left(1 - \cos^2 \alpha\right) = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$

$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

$a \cos \alpha - b \operatorname{sen} \alpha = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow a = b\sqrt{3}$

Nesse caso, o sistema resultante e o seu conjunto solução são

$\begin{cases} \sqrt{3}\, x + 3y = 2\sqrt{3}\, b \\ x + \sqrt{3}\, y = 2b \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(2b - \sqrt{3}\, t, t\right),\ t \in \mathbb{R}.$

(iii) impossível

$3\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = 0 \Leftrightarrow 3\cos^2 \alpha - \left(1 - \cos^2 \alpha\right) = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$

$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

$a \cos \alpha - b \operatorname{sen} \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} \neq \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow a \neq b\sqrt{3}$

42) (ITA 2014) Considere as seguintes afirmações sobre as matrizes quadradas A e B de ordem n, com A inversível e B antissimétrica:

I. Se o produto AB for inversível, então n é par;

II. Se o produto AB não for inversível, então n é ímpar;

III. Se B for inversível, então n é par.

Destas afirmações, é (são) verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas I e II. c) apenas I e III. d) apenas II e III. e) todas.

RESOLUÇÃO: c

I. VERDADEIRA

Sendo B antissimétrica, então temos:

$B = -B^T \Rightarrow \det B = \det\left(-B^T\right) = (-1)^n \cdot \det\left(B^T\right) = (-1)^n \det B$

Assim, se n for par a igualdade acima é sempre verdadeira, mas se n for ímpar, temos $\det B = -\det B \Leftrightarrow \det B = 0$.

Sendo assim, se AB for inversível, então $\det(AB) \neq 0 \Leftrightarrow \det A \cdot \det B \neq 0.$

Como A é inversível, então $\det A \neq 0$ e devemos ter também $\det B \neq 0$ o que só ocorre se n é par.

II. FALSA

Contra exemplo: Seja $B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ uma matriz antissimétrica e A uma matriz inversível qualquer 2×2, então o produto $AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ não é inversível e $n=2$ não é ímpar.

III. VERDADEIRA

Se B for inversível, então $\det B\neq 0$, logo n não pode ser ímpar, o que implica n é par.

43) (ITA 2014) Sejam $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ y & -x & 1\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}x+1 & x\\ y-2 & y\\ z+3 & z\end{bmatrix}$ matrizes reais tais que o produto AB é uma matriz antissimétrica. Das afirmações abaixo:

I. BA é antissimétrica;

II. BA não é inversível;

III. O sistema $(BA)X=0$, com $X^t=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}$, admite infinitas soluções,

é (são) verdadeira(s)

a) apenas I e II. b) apenas II e III. c) apenas I. d) apenas II. e) apenas III.

RESOLUÇÃO: b

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ y & -x & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x+1 & x\\ y-2 & y\\ z+3 & z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-y+z+6 & x-y+z\\ 2x+y+z+3 & z\end{bmatrix}$$

Como AB é antissimétrica, temos:

$z=0$

$2x+y+z+3=-(x-y+z)\Leftrightarrow x=-1$

$x-y+z+6=0\Leftrightarrow x-y=-6\Rightarrow -1-y=-6\Leftrightarrow y=5$

$$\Rightarrow AB=\begin{bmatrix}0 & -6\\ 6 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ y & -x & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 5 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B=\begin{bmatrix}x+1 & x\\ y-2 & y\\ z+3 & z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 5\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

I. FALSA

$$BA=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 5\\ 3 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 5 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -1 & -1\\ 28 & 2 & 8\\ 3 & -3 & 3\end{bmatrix}$$

Logo, BA não é antissimétrica.

II. VERDADEIRA

$$\det BA = \begin{vmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 28 & 2 & 8 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -30 - 24 + 84 + 6 + 84 - 120 = 0$$

Logo, BA não é inversível.

III. VERDADEIRA

Como $\det(BA) = 0$, o sistema homogêneo $(BA)X = 0$ não é de Cramer e, portanto, será possível e indeterminado, o que implica que admite infinitas soluções.

44) (ITA 2014) Seja M uma matriz quadrada de ordem 3, inversível, que satisfaz a igualdade

$$\det(2M^2) - \det(\sqrt[3]{2}M^3) = \frac{2}{9}\det(3M).$$

Então, um valor possível para o determinante da inversa de M é

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{5}$ e) $\frac{5}{4}$

RESOLUÇÃO: a

$$\det(2M^2) = 2^3 \det(M^2) = 8(\det M)^2$$

$$\det(\sqrt[3]{2}\,M^3) = (\sqrt[3]{2})^3 \det(M^3) = 2(\det M)^3$$

$$\frac{2}{9}\det(3M) = \frac{2}{9} \cdot 3^3 \det M = 6 \det M$$

$$\det(2M^2) - \det(\sqrt[3]{2}\,M^3) = \frac{2}{9}\det(3M) \Leftrightarrow 8(\det M)^2 - 2(\det M)^3 = 6 \det M$$

$$\Leftrightarrow 2\det M \cdot \left((\det M)^2 - 4\det M + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \det M = 0 \vee \det M = 1 \vee \det M = 3$$

Como M é inversível, então $\det M \neq 0$, o que implica $\det M = 1$ ou $\det M = 3$.

O determinante da inversa de M é $\det M^{-1} = \frac{1}{\det M}$ que pode ser igual a 1 ou a $\frac{1}{3}$.

45) (ITA 2014) Considere a equação $A(t)X = B(t)$, $t \in \mathbb{R}$, em que $A(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{2t} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\det A(t) = 1$ e $t \neq 0$, os valores de x, y e z são, respectivamente,

a) $2\sqrt{2}$, 0, $-3\sqrt{2}$.
b) $-2\sqrt{2}$, 0, $-3\sqrt{2}$.
c) 0, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$.
d) 0, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$.
e) $2\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, 0.

RESOLUÇÃO: b

$$\det A(t)=\begin{vmatrix}2e^{-2t} & -e^{2t} & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{vmatrix}=4e^{-2t}+3e^{2t}+1-3-2e^{2t}-2e^{-2t}=e^{2t}+2e^{-2t}-2=1$$

$$\Leftrightarrow e^{2t}+\frac{2}{e^{2t}}-3=0\Leftrightarrow\left(e^{2t}\right)^2-3e^{2t}+2=0\Leftrightarrow e^{2t}=1\vee e^{2t}=2\Leftrightarrow t=0\vee t=\ln\sqrt{2}$$

Como $t\neq 0$, então $t=\ln\sqrt{2}$ e $e^{2t}=2$.

Assim, o sistema linear na forma matricial é dado por:

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -5 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ 0\\ 3\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$y=0$

$-5y-z=3\sqrt{2}\Leftrightarrow z=-3\sqrt{2}$

$x-2y-z=\sqrt{2}\Rightarrow x+3\sqrt{2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=-2\sqrt{2}$

Portanto, temos $(x,y,z)=\left(-2\sqrt{2},0,-3\sqrt{2}\right)$.

46) (ITA 2014) Considere o sistema linear nas incógnitas x, y e z

$$\begin{cases}x+ \quad y+2z=0\\ -x+(\operatorname{sen}\theta)y+4z=0\\ 2x+(1-\cos 2\theta)y+16z=0\end{cases},\quad \theta\in[0,2\pi]..$$

a) Determine θ tal que o sistema tenha infinitas soluções.

b) Para θ encontrado em (a), determine o conjunto-solução do sistema.

RESOLUÇÃO:

a) Observemos inicialmente que $1-\cos 2\theta=2\operatorname{sen}^2\theta$. Assim, podemos efetuar essa substituição na última equação do sistema e o sistema resultante será dado por

$$\begin{cases}x+y+2z=0\\ -x+(\operatorname{sen}\theta)y+4z=0\\ 2x+\left(2\operatorname{sen}^2\theta\right)y+16z=0\end{cases}.$$

Esse sistema é um sistema linear homogêneo, cuja matriz incompleta é

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & \operatorname{sen}\theta & 4\\ 2 & 2\operatorname{sen}^2\theta & 16\end{bmatrix}.$$

.

Se $\det A\neq 0$, o sistema é de Cramer e admite apenas a solução trivial $S=\{(0,0,0)\}$.

Se $\det A=0$, o sistema é possível indeterminado e admite infinitas soluções.

Assim, para que o sistema tenha infinitas soluções, devemos ter

$$\det A = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & \operatorname{sen}\theta & 4 \\ 2 & 2\operatorname{sen}^2\theta & 16 \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} 4\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \operatorname{sen}\theta & 2 \\ (-1)^2 & \operatorname{sen}^2\theta & 2^2 \end{vmatrix} \overset{(**)}{=} 4\cdot(\operatorname{sen}\theta+1)(2+1)(2-\operatorname{sen}\theta)=0$$

$$\Leftrightarrow 12(\operatorname{sen}\theta+1)(2-\operatorname{sen}\theta)=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta=-1 \Leftrightarrow \theta=\frac{3\pi}{2}$$

Observe que em $(*)$ colocamos 2 em evidência na terceira coluna e na terceira linha e em $(**)$ utilizamos a fórmula do determinante da matriz de Vandermonde.

b) Na letra a), o ângulo θ obtido satisfaz $\operatorname{sen}\theta=-1.$ Assim, o sistema resultante é

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ -x-y+4z=0 \\ 2x+2y+16z=0 \end{cases}$$

Vamos escalonar o sistema.

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ -x-y+4z=0 \\ 2x+2y+16z=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{L3}\leftarrow\text{L3}-2\cdot\text{L1}]{\text{L2}\leftarrow\text{L2}+\text{L1}} \begin{cases} x+y+2z=0 \\ 6z=0 \\ 12z=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{L2}\leftarrow\text{L2}\div 6]{\text{L3}\leftarrow\text{L3}-2\text{L2}} \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \\ 0=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-x=-t,\ t\in\mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}$$

Assim, o conjunto solução do sistema é $S=\{(t,-t,0);\ t\in\mathbb{R}\}$.

47) (ITA 2015) Seja $A=(a_{ij})_{5\times5}$ a matriz tal que $a_{ij}=2^{i-1}(2j-1),\ 1\le i,j\le 5.$ Considere as afirmações a seguir:

I. Os elementos de cada linha i formam uma progressão aritmética de razão 2^i.
II. Os elementos de cada coluna j formam uma progressão geométrica de razão 2.
III. $\operatorname{tr} A$ é um número primo.
É (são) verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas I e II. c) apenas II e III. d) apenas I e III. e) I, II e III.

RESOLUÇÃO: e

I. Os elementos de cada linha i formam uma progressão aritmética de razão 2^i. (VERDADEIRA)

$$a_{ij}=2^{i-1}(2j-1)$$

$$a_{i(j+1)}=2^{i-1}(2(j+1)-1)=2^{i-1}(2j+1)$$

$$a_{i(j+1)}-a_{ij}=2^{i-1}(2j+1-2j+1)=2^i$$

Portanto, a diferença entre dois elementos consecutivos da linha i é constante e igual a 2^i, então esses elementos formam uma progressão aritmética de razão 2^i.

II. Os elementos de cada coluna j formam uma progressão geométrica de razão 2. (VERDADEIRA)

$$a_{ij}=2^{i-1}(2j-1)$$

$$a_{(i+1)j}=2^{(i+1)-1}(2j-1)=2^i(2j-1)$$

$$\frac{a_{(i+1)j}}{a_{ij}}=\frac{2^i(2j-1)}{2^{i-1}(2j-1)}=2$$

Portanto, a razão entre dois elementos consecutivos da coluna j é constante e igual a 2, então esses elementos formam uma progressão geométrica de razão 2.
III. $\operatorname{tr} A$ é um número primo. (VERDADEIRA)

$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{5} a_{ii} = \sum_{i=1}^{5} 2^{i-1}(2i-1) = 2^0 \cdot 1 + 2^1 \cdot 3 + 2^2 \cdot 5 + 2^3 \cdot 7 + 2^4 \cdot 9 = 227$ que é primo.

48) (ITA 2015) Considere a matriz $M = (m_{ij})_{2\times 2}$ tal que $m_{ij} = j - i + 1,\ i, j = 1, 2.$ Sabendo-se que

$$\det\left(\sum_{k=1}^{n} M^k - n\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right) = 252,$$

Então o valor de n é igual a
a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

RESOLUÇÃO: c
$m_{11} = 1-1+1 = 1,\ m_{12} = 2-1+1 = 2,\ m_{21} = 1-2+1 = 0,\ m_{22} = 2-2+1 = 1$

$\Rightarrow M = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Vamos estudar as primeiras potências de M e tentar estabelecer um padrão.

$M^2 = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$M^3 = \begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$M^4 = \begin{bmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 8\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Isso permite supor que $M^k = \begin{bmatrix}1 & 2k\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \forall k \in \mathbb{N}^*$. Vamos demonstrar isso por indução finita.

1º) A proposição é verdadeira para $n = 1$: $M = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\cdot 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

2º) Hipótese de indução: $M^k = \begin{bmatrix}1 & 2k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

3º) Vamos demonstrar que a proposição é verdadeira para $n = k+1$:

$M^{k+1} = M^k \cdot M = \begin{bmatrix}1 & 2k\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2+2k\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2(k+1)\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Logo, a proposição é verdadeira para qualquer inteiro positivo.
Vamos usar esse resultado para obter uma expressão geral para a matriz cujo determinante precisamos calcular.

$$\sum_{k=1}^{n} M^k = \sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix}1 & 2k\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{n} 1 & 2\sum_{k=1}^{n} k\\ 0 & \sum_{k=1}^{n} 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n & n(n+1)\\ 0 & n\end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{n} M^k - n\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n & n(n+1)\\ 0 & n\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}n & 0\\ n & n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & n(n+1)\\ -n & 0\end{bmatrix}$$

$$\det\left(\sum_{k=1}^{n} M^k - n\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix}0 & n(n+1)\\ -n & 0\end{bmatrix} = 252 \Leftrightarrow n^2(n+1) = 252 = 6^2 \cdot 7$$

$$n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n = 6$$

49) (ITA 2015) Sejam α e β números reais não nulos. Determine os valores de b, c, d, bem como a relação entre α e β para que ambos os sistemas lineares S e T a seguir sejam compatíveis indeterminados.

$$S\begin{cases}2x + by = \alpha\\ cx + y = \beta\end{cases} \qquad T\begin{cases}cx + 3y = \alpha\\ 4x + dy = \beta\end{cases}$$

RESOLUÇÃO:

Para que S seja compatível (possível) e indeterminado, devemos ter $\frac{2}{c} = \frac{b}{1} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Para que T seja compatível (possível) e indeterminado, devemos ter $\frac{c}{4} = \frac{3}{d} = \frac{\alpha}{\beta}$.

$$\Rightarrow \frac{2}{c} = \frac{b}{1} = \frac{c}{4} = \frac{3}{d} \Rightarrow c^2 = 8 \Leftrightarrow c = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{1} = \frac{2}{c} = \frac{2}{\pm 2\sqrt{2}} \Leftrightarrow b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{3}{d} = \frac{c}{4} = \frac{\pm 2\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow d = \pm 3\sqrt{2}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{c} = \frac{2}{\pm 2\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(b, c, d, \frac{\alpha}{\beta}\right) \in \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}, -3\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

50) (ITA 2016) Se o sistema de equações

$$\begin{cases}x + y + 4z = 2\\ x + 2y + 7z = 3\\ 3x + y + az = b\end{cases}$$

é impossível, então os valores de a e b são tais que

a) $a = 6$ e $b \neq 4$.
b) $a \neq 6$ e $b \neq 4$.
c) $a \neq 6$ e $b = 4$.
d) $a = 6$ e $b = 4$.
e) a é arbitrário e $b \neq 4$.

RESOLUÇÃO: a

$$\begin{cases} x+y+4z=2 \\ x+2y+7z=3 \\ 3x+y+az=b \end{cases} \underset{L3 \leftarrow L3-3 \cdot L1}{\overset{L2 \leftarrow L2-L1}{\sim}} \begin{cases} x+y+4z=2 \\ y+3z=1 \\ -2y+(a-12)z=b-6 \end{cases} \overset{L3 \leftarrow L3+2 \cdot L2}{\sim} \begin{cases} x+y+4z=2 \\ y+3z=1 \\ (a-6)z=b-4 \end{cases}$$

Para que o sistema seja impossível, devemos ter
$a-6=0 \Leftrightarrow a=6$ e $b-4 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 4.$

51) (ITA 2016) Se $M=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $N=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, então $MN^T - M^{-1}N$ é igual a

a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

RESOLUÇÃO: c

$$M=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 0 & (-1)^{1+2} \cdot 2 \\ (-1)^{2+1} \cdot (-1) & (-1)^{2+2} \cdot (1) \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$MN^T - M^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

52) (ITA 2016) Seja A a matriz de ordem 3×2, dada por $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Determine todas as matrizes B tais que $BA = I_2$.

b) Existe uma matriz B com $BA = I_2$ que satisfaça $BB^T = I_2$? Se sim, dê um exemplo de uma dessas matrizes.

RESOLUÇÃO:

A matriz B deve ser de ordem 2×3. Seja $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$, temos:

$$BA = I_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{11}+b_{13}=1 \\ b_{12}+b_{13}=0 \\ b_{21}+b_{23}=0 \\ b_{22}+b_{23}=1 \end{cases}$$

A sistema acima é equivalente a dois sistemas de 3 variáveis e 2 equações indeterminados. Assim, fazendo $b_{13}=a$ e $b_{23}=b$, temos:

$b_{11} = 1 - b_{13} = 1 - a$

$b_{12} = -b_{13} = -a$

$b_{21} = -b_{23} = -b$

$b_{22} = 1 - b_{23} = 1 - b$

Portanto, as matrizes B são dadas por $B = \begin{bmatrix} 1-a & -a & a \\ -b & 1-b & b \end{bmatrix}$, onde a e b são números quaisquer.

b) Devemos procurar por uma matriz B da forma $B = \begin{bmatrix} 1-a & -a & a \\ -b & 1-b & b \end{bmatrix}$, tal que $BB^T = I_2$.

$$BB^T = I_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-a & -a & a \\ -b & 1-b & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-a & -b \\ -a & 1-b \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)^2 + (-a)^2 + a^2 = 1 \\ (1-a)(-b) + (-a)(1-b) + ab = 0 \\ (-b)(1-a) + (1-b)(-a) + ab = 0 \\ (-b)^2 + (1-b)^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \ \vee \ a = \dfrac{2}{3} \\ a + b = 3ab \\ 3b^2 - 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0 \ \vee \ b = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Considerando a segunda equação, as soluções do sistema são $a = b = 0$ ou $a = b = \frac{2}{3}$.

Portanto, as matrizes que satisfazem à condição pedida são $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

53) (ITA 2017) Considere o sistema de equações

$$S \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{27}{y^2} + \dfrac{8}{z^3} = 3 \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{81}{y^2} + \dfrac{40}{z^3} = 10 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{54}{y^2} + \dfrac{24}{z^3} = 7 \end{cases}$$

Se (x, y, z) é uma solução real de S, então $|x| + |y| + |z|$ é igual a

a) 0 b) 3 c) 6 d) 9 e) 12

RESOLUÇÃO: c

Sejam $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{27}{y^2}$ e $c = \frac{8}{z^3}$, então o sistema pode ser escrito na forma:

$$S \begin{cases} a + b + c = 3 \\ 4a + 3b + 5c = 10 \\ 2a + 2b + 3c = 7 \end{cases}$$

Fazendo $L2-3\cdot L1$ e $L3-2\cdot L1$, temos:

$$S\begin{cases} a+b+c=3 \Rightarrow b=3-(-1)-1=3 \\ a+2c=1 \Rightarrow a=1-2\cdot 1=-1 \\ c=1 \end{cases}$$

Retornando a substituição inicial, vem:

$\frac{1}{x}=a=-1 \Leftrightarrow x=-1$

$\frac{27}{y^2}=b=3 \Leftrightarrow y^2=9 \Leftrightarrow |y|=3$

$\frac{8}{z^3}=c=1 \Leftrightarrow z^3=8 \Leftrightarrow z=2$

$\Rightarrow |x|+|y|+|z|=|-1|+3+2=6$

54) (ITA 2017) Sejam $D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $P=\begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Considere $A=P^{-1}DP$. O valor de $\det(A^2+A)$ é

a) 144 b) 180 c) 240 d) 324 e) 360

RESOLUÇÃO: a

$\det(A^2+A)=\det(A\cdot(A+I))=\det A\cdot\det(A+I)=6\cdot 24=144$

$\det A=\det(P^{-1}DP)=\det(P^{-1})\cdot\det D\cdot\det P=\frac{1}{\det P}\cdot\det D\cdot\det P=\det D=6$

$\det(A+I)=\det(P^{-1}DP+P^{-1}P)=\det(P^{-1}\cdot(D+I)\cdot P)=\det(P^{-1})\cdot\det(D+I)\cdot\det P=$

$=\frac{1}{\det P}\cdot\det(D+I)\cdot\det P=\det(D+I)=24$

$\det D=\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}=6$

$\det(D+I)=\det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}=24$

55) (ITA 2017) Determine todos os valores reais de a para os quais o seguinte sistema linear é impossível:

$$\begin{cases} x+ay+z=2 \\ -x-2y+3z=-1 \\ 3x+az=5 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO:
Para que o sistema seja impossível, ele não pode ser de Cramer, então o determinante da sua matriz incompleta deve ser nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2a + 9a + 6 + a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 7a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \vee a = -6$$

Para $a = -1$, o sistema pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x - 2y + 3z = -1 \\ 3x - z = 5 \end{cases} \underset{L3 \leftarrow L3-3 \cdot L1}{\overset{L2 \leftarrow L2+L1}{\sim}} \begin{cases} x - y + z = 2 \\ -3y + 4z = 1 \\ 3y - 4z = -1 \end{cases} \overset{L3 \leftarrow L3+L2}{\sim} \begin{cases} x - y + z = 2 \\ -3y + 4z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Analisando a forma escalonada do sistema, concluímos que ele é possível e indeterminado.
Para $a = -6$, o sistema pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} x - 6y + z = 2 \\ -x - 2y + 3z = -1 \\ 3x - 6z = 5 \end{cases} \underset{L3 \leftarrow L3-3 \cdot L1}{\overset{L2 \leftarrow L2+L1}{\sim}} \begin{cases} x - 6y + z = 2 \\ -8y + 4z = 1 \\ 18y - 9z = -1 \end{cases} \underset{L3 \leftarrow L3/9}{\overset{L2 \leftarrow L2/4}{\sim}} \begin{cases} x - 6y + z = 2 \\ -2y + z = 1/4 \\ 2y - z = -1/9 \end{cases}$$

$$\overset{L3 \leftarrow L3+L2}{\sim} \begin{cases} x - 6y + z = 2 \\ -2y + z = 1/4 \\ 0 = 5/36 \end{cases}$$

Analisando a forma escalonada do sistema, concluímos que ele é impossível.
Logo, o sistema é impossível apenas para $a = -6$.

56) (ITA 2018) Sejam $x_1, \ldots, x_5$ e $y_1, \ldots, y_5$ números reais arbitrários e $A = (a_{ij})$ uma matriz 5×5 definida por $a_{ij} = x_i + y_j$, $1 \le i, j \le 5$. Se r é a característica da matriz A, então o maior valor possível de r é

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

RESOLUÇÃO: b

$$A = \begin{bmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_1+y_3 & x_1+y_4 & x_1+y_5 \\ x_2+y_1 & x_2+y_2 & x_2+y_3 & x_2+y_4 & x_2+y_5 \\ x_3+y_1 & x_3+y_2 & x_3+y_3 & x_3+y_4 & x_3+y_5 \\ x_4+y_1 & x_4+y_2 & x_4+y_3 & x_4+y_4 & x_4+y_5 \\ x_5+y_1 & x_5+y_2 & x_5+y_3 & x_5+y_4 & x_5+y_5 \end{bmatrix} \underset{\substack{L4 \leftarrow L4-L1 \\ L5 \leftarrow L5-L1}}{\overset{\substack{L2 \leftarrow L2-L1 \\ L3 \leftarrow L3-L1}}{\sim}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_1+y_3 & x_1+y_4 & x_1+y_5 \\ x_2-x_1 & x_2-x_1 & x_2-x_1 & x_2-x_1 & x_2-x_1 \\ x_3-x_1 & x_3-x_1 & x_3-x_1 & x_3-x_1 & x_3-x_1 \\ x_4-x_1 & x_4-x_1 & x_4-x_1 & x_4-x_1 & x_4-x_1 \\ x_5-x_1 & x_5-x_1 & x_5-x_1 & x_5-x_1 & x_5-x_1 \end{bmatrix}$$

Qualquer subdeterminante 3×3 de A tem duas linhas proporcionais e, portanto, é nulo. Logo, a característica de A não é maior que 2.
Vamos tentar identificar um subdeterminante de A de ordem 2 e não-nulo.

$$\begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 \\ x_2-x_1 & x_2-x_1 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)\cdot\begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)\cdot(y_1-y_2)$$

Assim, se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, então a característica da matriz A é $r = 2$ que é o maior valor possível.

57) (ITA 2018) Sejam A e B matrizes quadradas $n \times n$ tais que $A + B = A \cdot B$ e I_n é a matriz identidade $n \times n$. Das afirmações:

I. $I_n - B$ é inversível;

II. $I_n - A$ é inversível;

III. $A \cdot B = B \cdot A$.

é (são) verdadeira(s)

a) somente I.
b) somente II.
c) somente III
d) somente I e III
e) todas.

RESOLUÇÃO: e

I. VERDADEIRA

$$A + B = A \cdot B \Leftrightarrow A \cdot B - A - B + I_n = I_n \Leftrightarrow (I_n - A)(I_n - B) = I_n$$

Logo, $I_n - B$ é inversível e sua inversa é $I_n - A$.

II. VERDADEIRA

Vide desenvolvimento de I.

III. VERDADEIRA

$$(I_n - A)(I_n - B) = I_n \Leftrightarrow (I_n - B)(I_n - A) = I_n \Leftrightarrow I_n - A - B + B \cdot A = I_n$$
$$\Leftrightarrow B \cdot A = A + B = A \cdot B$$

58) (ITA 2018) Se o sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2a^2 y + (2a^4 - a)z = 0 \\ x + ay + (a^3 - 1)z = 0 \end{cases}$ admite infinitas soluções, então os possíveis valores do parâmetro a são

a) $0,\ -1,\ \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.
b) $0,\ -1,\ \dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.
c) $0,\ -1,\ \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.
d) $0,\ -1,\ -1-\sqrt{3},\ -1+\sqrt{3}$.
e) $0,\ -1,\ 1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}$.

RESOLUÇÃO: b

Um sistema homogêneo admite infinitas soluções se, e somente se, o determinante da matriz incompleta é nulo (não é de Cramer).

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2a^2 & (2a^4 - a) \\ 1 & a & (a^3 - 1) \end{vmatrix} = 0.$$

Vamos aplicar a regra de Chió ao determinante anterior.

$\det A = \begin{vmatrix} 2a^2 & 2a^4 - a \\ a-1 & a^3 - 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2a^4 - 3a^2 - a = \Leftrightarrow a\left(2a^3 - 3a - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow a\left(2a^3 - 2a - a - 1\right) = 0 \Leftrightarrow a\left[2a(a+1)(a-1) - (a+1)\right] = 0$

$\Leftrightarrow a(a+1)\left(2a^2 - 2a - 1\right) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \ \vee \ a = -1 \ \vee \ a = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

59) (ITA 2018) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Se o polinômio $p(x)$ é dado por $p(x) = \det A$, então o produto das raízes de $p(x)$ é

a) $\dfrac{1}{2}$.
b) $\dfrac{1}{3}$.
c) $\dfrac{1}{5}$.
d) $\dfrac{1}{7}$.
e) $\dfrac{1}{11}$.

RESOLUÇÃO: d

$$p(x) = \det A = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Vamos aplicar a regra de Chió usando como referência o elemento $a_{21} = 1$.

$$p(x) = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} x-2 & x^2-3 & x^3-4 \\ 3+2 & 4+3 & 5+4 \\ 2+4 & 1+6 & 1+8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x-2 & x^2-3 & x^3-4 \\ 5 & 7 & 9 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} \underset{L3 \leftarrow L3 - L2}{=}$$

$$= -\begin{vmatrix} x-2 & x^2-3 & x^3-4 \\ 5 & 7 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo o determinante por Laplace na linha 3, temos:

$$p(x) = -1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} x^2-3 & x^3-4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -\left(9x^2 - 27 - 7x^3 + 28\right) = 7x^3 - 9x^2 - 1.$$

Pelas relações de Girard, o produto das raízes de $p(x) = 7x^3 - 9x^2 - 1$ é $\sigma_3 = \dfrac{-(-1)}{7} = \dfrac{1}{7}$.

60) (ITA 2018) Uma progressão aritmética $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ satisfaz a propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma da progressão é igual a $2n^2 + 5n$. Nessas condições, o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 + 2 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$ é

a) –96 b) –85 c) 63 d) 99 e) 115

RESOLUÇÃO: a

Vamos, inicialmente, desenvolver o determinante, considerando que $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é uma P.A. de razão r e a expressão do termo geral $a_n = a_p + r \cdot (n - p)$.

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 + 2 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \underset{L3 \leftarrow L3 - L2}{\overset{L2 \leftarrow L2 - L1}{=}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 - a_1 & a_5 - a_2 & a_6 - a_3 \\ a_7 - a_4 + 2 & a_8 - a_5 & a_9 - a_6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 3r & 3r & 3r \\ 3r + 2 & 3r & 3r \end{vmatrix} \underset{L2 \leftarrow L2/3r}{\overset{L3 \leftarrow L3 - L2}{=}} 3r \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Vamos agora usar que a soma dos n primeiros termos da P.A. é $S_n = 2n^2 + 5n$ para calcular os três primeiros termos da progressão e sua razão.

$S_1 = a_1 = 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 7 \Leftrightarrow a_1 = 7$

$S_2 = a_1 + a_2 = 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 \Leftrightarrow 7 + a_2 = 18 \Leftrightarrow a_2 = 11$

$r = a_2 - a_1 = 11 - 7 = 4$

$a_3 = a_2 + r = 11 + 4 = 15$

Assim, temos:

$$\Delta = 3r \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 11 & 15 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} 3 \cdot 4 \cdot (22 - 30) = -96.$$

Note que em (*) utilizamos a regra de Sarrus para calcular o determinante de ordem 3.

61) (ITA 2019) Assinale a opção que identifica o lugar geométrico de todos os pares ordenados $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que tornam impossível o sistema linear

$$S: \begin{cases} -x + 5y = 10 \\ \left(\dfrac{a^2}{5} + 5b^2\right)x + 10aby = 1 \end{cases}$$

a) uma elipse b) uma reta c) uma parábola
d) uma hipérbole e) um único ponto

RESOLUÇÃO: b

Para que o sistema seja impossível, devemos ter $\dfrac{-1}{\dfrac{a^2}{5}+5b^2}=\dfrac{5}{10ab}\neq\dfrac{10}{1}.$

A primeira igualdade resulta:

$-10ab=a^2+25b^2 \Leftrightarrow a^2+10ab+25b^2=0 \Leftrightarrow (a+5b)^2=0 \Leftrightarrow a+5b=0.$

A desigualdade implica $\dfrac{5}{10ab}=\dfrac{5}{10\cdot(-5b)\cdot b}\neq\dfrac{10}{1} \Leftrightarrow b^2\neq-\dfrac{1}{100}$, que é sempre verdade, pois b é real.

Logo, o lugar geométrico de todos os pares ordenados $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ que tornam impossível o sistema linear é representado ´pela equação $a+5b=0$, que é uma reta.

62) (ITA 2019) Considere as seguintes afirmações a respeito de matrizes A de ordem $n\times n$ inversíveis, tais que os seus elementos e os de sua inversa sejam todos números inteiros:

I. $|\det(A)|=1.$

II. $A^T=A^{-1}.$

III. $A+A^{-1}$ é uma matriz diagonal.

É(são) sempre VERDADEIRA(S)

a) apenas I. b) apenas III. c) apenas I e II.
d) apenas I e III. e) todas.

RESOLUÇÃO: a

I. VERDADEIRA

Como os elementos de A e A^{-1} são números inteiros, então $\det(A)$ e $\det(A^{-1})$ também são números inteiros.

Sabemos que $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)} \Leftrightarrow \det(A^{-1})\cdot\det(A)=1.$

Como $\det(A)$ e $\det(A^{-1})$ são dois números inteiros cujo produto é 1, então $\det(A)=\det(A^{-1})=1$ ou $\det(A)=\det(A^{-1})=-1$. Portanto, $|\det(A)|=1.$

II. FALSA

Vamos apresentar um contraexemplo.

As matrizes $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ e $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$ são duas matrizes de elementos inteiros.

A matriz transposta de A é $A^T=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$ que é diferente de $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}.$

III. FALSA

Para matrizes 2×2, a inversa de $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ é $A^{-1}=\dfrac{1}{ab-bc}\begin{bmatrix}d&-c\\-b&a\end{bmatrix}.$

Vamos construir um contraexemplo, considerando a expressão acima.

Seja $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$, então $A^{-1}=\dfrac{1}{1}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$ e $A+A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix}$, que não é uma matriz diagonal.

63) (ITA 2020) Considere o conjunto $M(n,k)$ de todas as matrizes quadradas de ordem $n \times n$, com exatamente k elementos iguais a 1, e os demais iguais a 0 (zero). Escolhendo aletoriamente matrizes $L \in M(3,1)$ e $R \in M(4,2)$, a probabilidade de que $L^2 = 0$ e $R^2 = 0$ é igual a

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{4}{15}$ d) $\frac{13}{30}$ e) $\frac{29}{30}$

RESOLUÇÃO: b

As matrizes do tipo $L \in M(3,1)$ são matrizes quadradas de ordem 3 com todos os elementos nulos, exceto um elemento que é igual a 1.

Há 9 posições para colocar o elemento 1, então $\#(\Omega) = 9.$

Veja os seguintes exemplos de produtos de matrizes do tipo L.

$$L^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0_{3\times3}$$

$$L^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{3\times3}$$

Se o elemento igual a 1 está na diagonal principal, $L^2 \neq 0.$ Se o elemento igual a 1 está fora da diagonal principal, $L^2 = 0.$ Assim, há $9 - 3 = 6$ casos para os quais $L^2 = 0,$ o que implica $P(L^2 = 0) = \frac{\#(L^2 = 0)}{\#(\Omega)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$

As matrizes do tipo $R \in M(4,2)$ são matrizes quadradas de ordem 4 com todos os elementos nulos, exceto dois que são iguais a 1.

Há $C_{16}^2 = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$ posições para colocar os dois elementos 1, então $\#(\Omega) = 120.$

Para que $R^2 = 0,$ os elementos iguais a 1 não podem estar na diagonal principal e, se $a_{ij} = 1,$ com $i \neq j,$ o segundo elemento igual a 1 não pode estar na linha j e nem na coluna i.

Veja o exemplo a seguir no qual $a_{31} = 1$ e há um elemento igual a 1 na linha 1, $a_{12} = 1.$

$$R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0_{4\times4}$$

Assim, o número de casos para os quais $R^2 = 0$ é $\#(R^2 = 0) = \frac{12 \cdot (12 - 3 - 3)}{2} = 36,$ o que implica $P(R^2 = 0) = \frac{\#(R^2 = 0)}{\#(\Omega)} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}.$

Note que há 12 posições fora da diagonal principal. Escolhido esse elemento $a_{ij},$ com $i \neq j$ (para que esteja fora da diagonal principal), na escolha do segundo elemento não podemos usar as posições na linha j e na coluna i. Na linha j há 3 posições fora da diagonal principal e na coluna i há 3 posições fora da diagonal principal. Assim, teremos $12-3-3=6$ posições para colocar o segundo 1. A divisão por dois é necessária para desconsiderar a ordem da escolha.

A probabilidade de ocorrência dos dois eventos independentes é $P\left(\left(L^2=0\right)\cap\left(R^2=0\right)\right)=P\left(L^2=0\right)\cdot P\left(R^2=0\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{5}$.