QUESTÕES DE MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES DO INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA (IME) DE 2010 A 2020
ENUNCIADOS

1) (IME 2010) Considere o determinante de uma matriz de ordem n definido por:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Sabendo que $\Delta_1 = 1$, o valor de Δ_{10} é

a) 59049 b) 48725 c) 29524 d) 9841 e) 364

2) (IME 2010) Considere o sistema abaixo, onde x_1, x_2, x_3 e Z pertencem ao conjunto dos números complexos.

$$\begin{cases} (1+i)x_1 - ix_2 + ix_3 = 0 \\ 2ix_1 - x_2 - x_3 = Z \\ (2i-2)x_1 + ix_2 - ix_3 = 0 \end{cases}$$

O argumento de Z, em graus, para que x_3 seja um número real positivo é:

a) 0° b) 45° c) 90° d) 135° e) 180°

Obs.: $i = \sqrt{-1}$

3) (IME 2010) Demonstre que a matriz $\begin{Bmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{Bmatrix}$, onde $x, y, z \in \mathbb{N}$, pode ser escrita como o quadrado de uma matriz simétrica, com traço igual a zero, cujos elementos pertencem ao conjunto dos números naturais.

Obs.: Traço de uma matriz é a soma dos elementos de sua diagonal principal.

4) (IME 2011) (IME 2011) Sejam $x_1, \dots, x_n$ os n primeiros termos de uma progressão aritmética. O primeiro termo e a razão desta progressão são os números reais x_1 e r, respectivamente. O determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & \cdots & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

é

a) $x_1^n \cdot r^n$ b) $x_1^n \cdot r$ c) $x_1^n \cdot r^{n-1}$ d) $x_1 \cdot r^n$ e) $x_1 \cdot r^{n-1}$

5) (IME 2011) Considere o sistema de equações lineares representado abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 7 \\ 9 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Os valores de a e d são, respectivamente:

a) 1 e 2 b) 2 e 3 c) 3 e 2 d) 2 e 2 e) 3 e 1

6) (IME 2011) Mostre que o determinante abaixo apresenta valor menor ou igual a 16 para todos valores de a, b e c, pertencentes ao conjunto dos números reais, que satisfazem a equação $a^2 + b^2 + c^2 = 4$.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

7) (IME 2012) São dadas as matrizes quadradas inversíveis A, B e C, de ordem 3. Sabe-se que o determinante de C vale $(4-x)$, onde x é um número real, o determinante da matriz inversa de B vale $-\frac{1}{3}$ e que $(CA^t)^t = P^{-1}BP$, onde P é uma matriz inversível.

Sabendo que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, determine os possíveis valores de x.

Obs.: $(M)^t$ é a matriz transposta de M.

a) -1 e 3 b) 1 e -3 c) 2 e 3 d) 1 e 3 e) -2 e -3

8) (IME 2012) Calcule as raízes de $f(x)$ em função de a, b e c, sendo a, b, c e $x \in \mathbb{R}$ (real) e $f(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$.

9) (IME 2013) Considere o sistema de equações $\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = d \end{cases}$, com a, b, c, d, p e q reais, $abcd \neq 0$, $a + b = m$ e $d = nc$. Sabe-se que o sistema é indeterminado. O valor de $p + q$ é

a) m b) $\frac{m}{n}$ c) $m^2 - n^2$ d) mn e) $m + n$

10) (IME 2013) Seja Δ o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x^2 & x^3 \\ x & x & 1 \end{bmatrix}$. O número de possíveis valores de x reais que anulam Δ é

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

11) (IME 2013) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Seja a matriz $B = \sum_{k=1}^{n} A^k$, com k e n números inteiros. Determine a soma, em função de n, dos quatro elementos da matriz B.

12) (IME 2013) São dadas duas matrizes A e B tais que $A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}$ e $B \cdot A = \begin{bmatrix} x & 14 \\ 14 & y \end{bmatrix}$, com x e y reais e $x > y$. Determine:

a) o(s) valor(es) de x e y;

b) as matrizes A e B que satisfazem as equações apresentadas.

13) (IME 2014) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$, em que $abc = 1$. Sabe-se que $A^T \cdot A = I$, em que A^T é a matriz transposta de A e I é a matriz identidade de 3^a ordem. O produto dos possíveis valores de $a^3 + b^3 + c^3$ é

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

14) (IME 2014) Calcule o determinante abaixo, no qual $\omega = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$ e $i = \sqrt{-1}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & 0 & i \\ i & 1 & -i & \omega^2 \\ 1-i & \omega & i-1 & 1 \\ 0 & \omega & 1 & i \end{vmatrix}$$

15) (IME 2015) Dada a matriz A, a soma do módulo dos valores de x que tornam o determinante da matriz A nulo é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2x & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & x-1 & 2 \\ 1 & x+4 & 0 & 0 \\ x & -1 & 1 & x-2 \end{bmatrix}$$

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

16) (IME 2015) Sejam $S = a + b + c$ e $P = a \cdot b \cdot c$. Calcule o determinante abaixo unicamente em função de S e P.

$$\begin{vmatrix} a^2+(b+c)^2 & 2b^2 & (a+b)^2+c^2 \\ 2a^2 & (a+c)^2+b^2 & (a+b)^2+c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

17) (IME 2016) Seja $A=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, com $a,b\in\mathbb{R}$. O maior valor de a, com $a\neq 1$, que satisfaz $A^{24}=I$ é: (Observação: I é a matriz identidade 2×2)

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$ e) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$

18) (IME 2016) Define-se A como a matriz 2016×2016, cujos elementos satisfazem à igualdade:

$$a_{i,j}=\binom{i+j-2}{j-1}, \text{ para } i,j\in\{1,2,\ldots,2016\}.$$

Calcule o determinante de A.

19) (IME 2017) Seja $A=\begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ a-2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ com $a\in\mathbb{R}$. Sabe-se que $\det(A^2-2A+I)=16$. A soma dos valores de a que satisfazem essa condição é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

20) (IME 2017) Seja M uma matriz real 2×2. Defina uma função f na qual cada elemento da matriz se desloca para a posição seguinte no sentido horário, ou seja, se $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, implica que $f(M)=\begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$. Encontre todas as matrizes simétricas 2×2 reais na qual $M^2=f(M)$.

21) (IME 2017) Classifique o sistema abaixo como determinado, possível indeterminado e impossível de acordo com os valores reais de m.

$$\begin{cases} (m-2)x+2y-z=m+1 \\ 2x+my+2z=m^2+2 \\ 2mx+2(m+1)y+(m+1)z=m^3+3 \end{cases}$$

22) (IME 2018) Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 os quatro primeiros termos de uma P.A. com $x_1=x$ e razão r, com $x,r\in\mathbb{R}$. O determinante de $\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix}$ é:

a) 0 b) $x^4 \cdot r$ c) $x^4 \cdot r^3$ d) $x \cdot r^4$ e) $x \cdot r^3$

23) (IME 2018) Seja o seguinte sistema de equações, em que s é um número real:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - sx_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ sx_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Escolha uma faixa de valores de s em que as soluções do sistema são todas negativas.

a) $s < -2$ b) $-2 < s < 0$ c) $0 < s < 1$ d) $1 < s < 2$ e) $s > 2$

24) (IME 2018) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} k & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, com k real. Determine a faixa de valores de k para que exista uma matriz de números reais P tal que as condições abaixo sejam atendidas simultaneamente:

a) $A^T P + PA = I$ em que A^T é a transposta da matriz A e I é a matriz identidade;

b) P seja simétrica;

c) $p_{11} > 0$, em que p_{11} é o elemento da linha 1 e coluna 1 de P; e

d) $|P| > 0$, em que $|P|$ é o determinante da matriz P.

25) (IME 2019) Calcule o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ \log 81 & \log 900 & \log 300 \\ (\log 9)^2 & 2 + 4\log 3 + 2(\log 3)^2 & (\log 3 + 2)^2 \end{vmatrix}$$

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16

26) (IME 2019) Dadas as funções definidas nos reais $\mathbb{R}$:

$f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \operatorname{sen} x$, $f_3(x) = \cos x$, $f_4(x) = \operatorname{sen} 2x$ e $f_5(x) = e^{-x}$.

Mostre que existe uma única solução a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, tal que $a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) + a_4 f_4(x) + a_5 f_5(x)$ seja a função constante nula, onde $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$.

27) (IME 2020) Uma matriz A é semelhante a uma matriz B se, e somente se, existe uma matriz P tal que $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$.

a) Se A e B forem semelhantes, mostre que $\det(A) = \det(B)$.

b) Dadas $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Verifique se essas matrizes são semelhantes.

RESPOSTAS E CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES

1) c (Cálculo de determinantes e recorrência)
2) e (Resolução de sistemas lineares)
3) disc. (Multiplicação de matrizes e matriz simétrica)
4) e (Cálculo de determinantes, regra de Chió e recorrência)
5) b (Resolução de sistemas lineares)
6) disc. (Cálculo de determinantes e desigualdade)
7) d (Matrizes semelhantes, propriedades dos determinantes e teorema de Binet)
8) disc. (Cálculo de determinantes)
9) d (Discussão de sistemas de 2 equações e 2 variáveis)
10) c (Cálculo de determinantes de ordem 3)
11) disc. (Multiplicação de matrizes)
12) disc. (Multiplicação de matrizes e teorema de Binet)
13) d (Multiplicação de matrizes, matriz inversa e teorema de Binet)
14) disc. (Cálculo de determinantes e teorema de Jacobi)
15) a (Cálculo de determinantes e regra de Chió)
16) disc. (Cálculo de determinantes e teorema de Jacobi)
17) e (Multiplicação de matrizes e teorema de Binet)
18) disc. (Propriedades dos determinantes e determinante da matriz triangular)
19) d (Multiplicação de matrizes e teorema de Binet)
20) disc. (Multiplicação de matrizes e matriz simétrica)
21) disc. (Discussão de sistemas lineares)
22) e (Cálculo de determinantes e teorema de Jacobi)
23) d (Discussão de sistemas lineares)
24) disc. (Multiplicação de matrizes, matriz simétrica e discussão de sistemas lineares)
25) e (Determinantes da matriz de Vandermonde)
26) disc. (Sistema homogêneo)
27) disc. (Matrizes semelhantes, teorema de Binet e resolução de sistemas lineares)

ENUNCIADOS E RESOLUÇÕES

1) (IME 2010) Considere o determinante de uma matriz de ordem n definido por:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots\ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Sabendo que $\Delta_1 = 1,$ o valor de Δ_{10} é

a) 59049 b) 48725 c) 29524 d) 9841 e) 364

RESOLUÇÃO: c

Aplicando Laplace na 1ª coluna obtemos

$$\Delta_n = 1\,.\,(-1)^{1+1}\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}}_{\text{ordem } n-1} + (-1)\,.\,(-1)^{1+2}\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}}_{\text{ordem } n-1}$$

Assim, $\Delta_n = 3^{n-1} + \Delta_{n-1}$.

Logo, $\sum\limits_{n=2}^{10} \Delta_n = \sum\limits_{n=2}^{10} 3^{n-1} + \sum\limits_{n=2}^{10} \Delta_{n-1} \Leftrightarrow \Delta_{10} = \dfrac{3\left(3^9-1\right)}{3-1} + \Delta_1 \Leftrightarrow \Delta_{10} = 29524$

2) (IME 2010) Considere o sistema abaixo, onde x_1, x_2, x_3 e Z pertencem ao conjunto dos números complexos.

$$\begin{cases} (1+i)x_1 - ix_2 + ix_3 = 0 \\ 2ix_1 - x_2 - x_3 = Z \\ (2i-2)x_1 + ix_2 - ix_3 = 0 \end{cases}$$

O argumento de Z, em graus, para que x_3 seja um número real positivo é:

a) 0° b) 45° c) 90° d) 135° e) 180°

Obs.: $i = \sqrt{-1}$

RESOLUÇÃO: e

$$\begin{cases}(1+i)x_1 - ix_2 + ix_3 = 0 \\ 2ix_1 - x_2 - x_3 = Z \\ (2i-2)x_1 + ix_2 - ix_3 = 0\end{cases} \Rightarrow x_3 = \frac{\begin{vmatrix}1+i & -i & 0 \\ 2i & -1 & Z \\ 2i-2 & i & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1+i & -i & i \\ 2i & -1 & -1 \\ 2i-2 & i & -i\end{vmatrix}} = \frac{Z(i+3)}{-2(i+3)} = \frac{Z}{-2} \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\Rightarrow Z \in \mathbb{R}_-^* \Rightarrow \arg(Z) = 180^\circ$$

3) (IME 2010) Demonstre que a matriz $\begin{Bmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{Bmatrix}$, onde $x, y, z \in \mathbb{N}$, pode ser escrita como o quadrado de uma matriz simétrica, com traço igual a zero, cujos elementos pertencem ao conjunto dos números naturais.

Obs.: Traço de uma matriz é a soma dos elementos de sua diagonal principal.

RESOLUÇÃO:

Seja a matriz M simétrica $M = \begin{pmatrix} a & r & s \\ r & b & t \\ s & t & c \end{pmatrix}$, na qual $a, b, c, r, s, t \in \mathbb{N}$ e $a + b + c = 0 \Rightarrow a = b = c = 0.$

$$\Rightarrow M^2 = \begin{pmatrix} r^2+s^2 & st & rt \\ st & r^2+t^2 & rs \\ rt & rs & s^2+t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

Observando a última igualdade, notamos que podemos tomar $r = z$, $s = y$ e $t = x$.

Portanto, a matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}$ satisfaz as condições do enunciado e temos

$$M^2 = \begin{pmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}.$$

4) (IME 2011) (IME 2011) Sejam $x_1, \dots, x_n$ os n primeiros termos de uma progressão aritmética. O primeiro termo e a razão desta progressão são os números reais x_1 e r, respectivamente. O determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & \cdots & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

é

a) $x_1^n \cdot r^n$ b) $x_1^n \cdot r$ c) $x_1^n \cdot r^{n-1}$ d) $x_1 \cdot r^n$ e) $x_1 \cdot r^{n-1}$

RESOLUÇÃO: e

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & \cdots & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = x_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ 1 & x_2 & x_2 & \cdots & x_2 \\ 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

Aplicando Chió em relação ao elemento da 1ª linha e 1ª coluna, temos:

$$= x_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & \cdots & x_2 - x_1 \\ x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_3 - x_1 \\ x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 & \cdots & x_4 - x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \end{vmatrix} = x_1 \cdot \begin{vmatrix} r & r & r & \cdots & r \\ r & 2r & 2r & \cdots & 2r \\ r & 2r & 3r & \cdots & 3r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & 2r & 3r & \cdots & (n-1)r \end{vmatrix} =$$

$$= x_1 \cdot r^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & (n-1) \end{vmatrix}$$

Seja $D_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & (n-1) \end{vmatrix}$, aplicando Chió em relação ao elemento da 1ª linha e 1ª coluna, temos:

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & (n-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & (n-2) \end{vmatrix} = D_{n-2}$$

Mas, como $D_1 = 1$, então $D_n = 1$, $\forall n$.

Portanto, o determinante inicial é $x_1 \cdot r^{n-1}$.

5) (IME 2011) Considere o sistema de equações lineares representado abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 7 \\ 9 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Os valores de a e d são, respectivamente:

a) 1 e 2 b) 2 e 3 c) 3 e 2 d) 2 e 2 e) 3 e 1

RESOLUÇÃO: b

Considerando as equações geradas pelas 2ª, 3ª e 5ª linhas, temos:

$$\begin{cases} 2b + 3d = 11 \\ a + 5b = 7 \\ 4a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2; b = 1 \text{ e } d = 3$$

6) (IME 2011) Mostre que o determinante abaixo apresenta valor menor ou igual a 16 para todos valores de a, b e c, pertencentes ao conjunto dos números reais, que satisfazem a equação $a^2 + b^2 + c^2 = 4$.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

RESOLUÇÃO:

Lema: Identidade de Gauss

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - ab\right)$$

$$= (a+b+c) \cdot \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2\right]$$

Demonstração:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a^3 + \underline{3a^2b} + \underline{3ab^2} + b^3 + c^3 - \underline{3a^2b} - \underline{3ab^2} - 3abc =$$

$$= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c) = (a+b+c)\left[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2\right] - 3ab(a+b+c) =$$

$$= (a+b+c)\left(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab\right) = (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - ab\right) =$$

$$= (a+b+c) \cdot \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2\right]$$

Seja D o determinante. Vamos aplicar a identidade de Gauss com as adaptações necessárias.

$D=(a+b)^3+(b+c)^3+(a+c)^3-3(a+b)(b+c)(a+c)$

$=2(a+b+c)\left[(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2-(a+b)(b+c)-(a+c)(a+b)-(b+c)(a+c)\right]$

$=2(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right)$

Seja $x=a+b+c$.

Note que $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$.

Logo, $x^2=4+2(ab+bc+ac)\Leftrightarrow ab+bc+ac=\dfrac{x^2-4}{2}$.

Daí, $D=2x\left[4-\left(\dfrac{x^2-4}{2}\right)\right]=12x-x^3\Leftrightarrow 16-D=x^3-12x+16=(x-2)^2(x+4)$.

Basta, agora, mostrar que $x+4\geq 0$. Por Cauchy-Schwarz:

$|(a,b,c)\cdot(1,1,1)|\leq\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{3}\Leftrightarrow -2\sqrt{3}\leq a+b+c\leq 2\sqrt{3}$.

Logo, $x\geq -2\sqrt{3}\Leftrightarrow x+4\geq 4-2\sqrt{3}>0$, o que implica $D\leq 16$.

7) (IME 2012) São dadas as matrizes quadradas inversíveis A, B e C, de ordem 3. Sabe-se que o determinante de C vale $(4-x)$, onde x é um número real, o determinante da matriz inversa de B vale $-\dfrac{1}{3}$ e que $\left(CA^t\right)^t=P^{-1}BP$, onde P é uma matriz inversível. Sabendo que $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\3&x&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, determine os possíveis valores de x.

Obs.: $(M)^t$ é a matriz transposta de M.

a) -1 e 3 b) 1 e -3 c) 2 e 3 d) 1 e 3 e) -2 e -3

RESOLUÇÃO: d

$\det C=4-x$

$\det\left(B^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det B}=-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow \det B=-3$

$\left(CA^t\right)^t=P^{-1}BP\Rightarrow \det\left(CA^t\right)^t=\det\left(P^{-1}BP\right)\Leftrightarrow \det\left(CA^t\right)=\det P^{-1}\cdot\det B\cdot\det P$

$\Leftrightarrow \det C\cdot\det A^t=\dfrac{1}{\det P}\cdot\det B\cdot\det P\Leftrightarrow \det C\cdot\det A=\det B\Leftrightarrow \det A=\dfrac{\det B}{\det C}=\dfrac{-3}{4-x}$

$\det A=\begin{vmatrix}0&0&1\\3&x&0\\1&0&0\end{vmatrix}=\dfrac{3}{x-4}\Leftrightarrow -x=\dfrac{3}{x-4}\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x=1\vee x=3$

8) (IME 2012) Calcule as raízes de $f(x)$ em função de a, b e c, sendo a, b, c e $x \in \mathbb{R}$ (real) e $f(x)=\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$.

RESOLUÇÃO:

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ x+a+b+c & x & c & b \\ x+a+b+c & c & x & a \\ x+a+b+c & b & a & x \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (x+a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & x & c & b \\ 1 & c & x & a \\ 1 & b & a & x \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$=(x+a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} x-a & c-b & b-c \\ c-a & x-b & a-c \\ b-a & a-b & x-c \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} (x+a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} x-a+b-c & c-b & b-c \\ 0 & x-b & a-c \\ x-a+b-c & a-b & x-c \end{vmatrix} \overset{(5)}{=}$$

$$=(x+a+b+c)\cdot(x-a+b-c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & c-b & b-c \\ 0 & x-b & a-c \\ 1 & a-b & x-c \end{vmatrix} \overset{(6)}{=} (x+a+b+c)\cdot(x-a+b-c)\cdot\begin{vmatrix} x-b & a-c \\ a-c & x-b \end{vmatrix} \overset{(7)}{=}$$

$$=(x+a+b+c)\cdot(x-a+b-c)\cdot\begin{vmatrix} x+a-b-c & a-c \\ x+a-b-c & x-b \end{vmatrix} \overset{(8)}{=}$$

$$=(x+a+b+c)\cdot(x-a+b-c)\cdot(x+a-b-c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & a-c \\ 1 & x-b \end{vmatrix} \overset{(9)}{=}$$

$$=(x+a+b+c)\cdot(x-a+b-c)\cdot(x+a-b-c)\cdot(x-a-b+c)$$

(1) Adicionou-se à primeira coluna a segunda, a terceira e a quarta colunas;
(2) Colocou-se $(x+a+b+c)$ em evidência na primeira coluna;
(3) Aplicou-se a regra de Chió no elemento a_{11};
(4) Adicionou-se à primeira coluna a terceira coluna;
(5) Colocou-se $(x-a+b-c)$ em evidência na primeira coluna;
(6) Aplicou-se a regra de Chió no elemento a_{11};
(7) Adicionou-se a segunda coluna à primeira coluna;
(8) Colocou-se $(x+a-b-c)$ em evidência na primeira coluna; e
(9) Calculou-se o determinante da matriz 2×2.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow (x+a+b+c)(x-a+b-c)(x+a-b-c)(x-a-b+c)=0$$
$$\Leftrightarrow S=\{-a-b-c, a-b+c, -a+b+c, a+b-c\}$$

9) (IME 2013) Considere o sistema de equações $\begin{cases} ax+by=c \\ px+qy=d \end{cases}$, com a, b, c, d, p e q reais, $abcd \neq 0$, $a+b=m$ e $d=nc$. Sabe-se que o sistema é indeterminado. O valor de $p+q$ é

a) m b) $\frac{m}{n}$ c) m^2-n^2 d) mn e) $m+n$

RESOLUÇÃO: d

Para que o sistema $\begin{cases} ax+by=c \\ px+qy=d \end{cases}$ seja indeterminado, devemos ter $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{d}$.

Vamos aplicar as propriedades de razões e proporções e substituir $a+b=m$ e $d=nc$ na expressão resultante.

$$\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{c}{d}=\frac{a+b}{p+q} \Rightarrow \frac{c}{nc}=\frac{m}{p+q} \Leftrightarrow p+q=mn$$

10) (IME 2013) Seja Δ o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x^2 & x^3 \\ x & x & 1 \end{bmatrix}$. O número de possíveis valores de x reais que anulam Δ é

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

RESOLUÇÃO: c

$$\Delta=\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x^2 & x^3 \\ x & x & 1 \end{bmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & x^2 \\ x & x & 1 \end{vmatrix}=x\cdot\left(x+2x^3+3x-3x^2-2-x^3\right)$$

$$=x\cdot\left(x^3-3x^2+4x-2\right)=x\cdot\left(x^3-x^2-2x^2+2x+2x-2\right)$$

$$=x\cdot\left[x^2(x-1)-2x(x-1)+2(x-1)\right]=x\cdot(x-1)\cdot\left(x^2-2x+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=1$$

Note que a equação $x^2-2x+2=0$ tem discriminante negativo e, portanto, não possui raízes reais.

Assim, há 2 possíveis valores que anulam Δ.

Cabe ressaltar que a fatoração acima foi direcionada pela verificação prévia de que $x=1$ é raiz de $x^3-3x^2+4x-2=0$. Essa fatoração também poderia ter sido feita por meio do algoritmo de Ruffini- Horner.

11) (IME 2013) Considere a matriz $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$. Seja a matriz $B=\sum_{k=1}^{n} A^k$, com k e n números inteiros. Determine a soma, em função de n, dos quatro elementos da matriz B.

RESOLUÇÃO:
1ª SOLUÇÃO:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Vamos estudar as potências da matriz A.

$$A^2=2\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot 2\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2^2\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^3=2^2\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot 2\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2^3\begin{bmatrix}1 & 3/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^4=2^3\begin{bmatrix}1 & 3/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot 2\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2^4\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Isso sugere que $A^k=2^k\cdot\begin{bmatrix}1 & k/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

Vamos provar isso utilizando o Princípio da Indução Finita (P.I.F.).

1°) Para $k=1$: $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (verdadeiro)

2°) Hipótese de indução: Supondo $A^k=2^k\cdot\begin{bmatrix}1 & k/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, para $k\in\mathbb{Z}_+^*$.

3°) Prova da veracidade para $k+1$:

$$A^{k+1}=A\cdot A^k=2\cdot\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}2^k\cdot\begin{bmatrix}1 & k/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2^{k+1}\begin{bmatrix}1 & (k+1)/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\text{ (verdadeiro)}$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, $A^k=2^k\cdot\begin{bmatrix}1 & k/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, para todo $k\in\mathbb{Z}_+^*$.

Assim, $B=\sum_{k=1}^{n} A^k=\sum_{k=1}^{n} 2^k\cdot\begin{bmatrix}1 & k/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{n} 2^k & \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\cdot k\\ 0 & \sum_{k=1}^{n} 2^k\end{bmatrix}$.

$\sum_{k=1}^{n} 2^k$ é a soma de uma progressão geométrica de n termos e razão 2, então $\sum_{k=1}^{n} 2^k=\frac{2\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$.

$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\cdot k=S_n$ é soma de uma progressão aritmético-geométrica (PAG). Assim, temos:

$$S_n=2^0\cdot 1+2^1\cdot 2+2^2\cdot 3+\cdots+2^{n-1}\cdot n$$

$$2\cdot S_n=2^1\cdot 1+2^2\cdot 2+2^3\cdot 3+\cdots+2^{n-1}\cdot(n-1)+2^n\cdot n$$

$$\Rightarrow (2-1)\cdot S_n = -2^0\cdot 1 - 2^1 - 2^2 - \ldots - 2^{n-1} + 2^n\cdot n = -1 - \left(\frac{2\left(2^{n-1}-1\right)}{2-1}\right) + 2^n\cdot n$$

$$\Leftrightarrow S_n = 2^n(n-1)+1$$

Logo, $B = \begin{bmatrix} 2^{n+1}-2 & 2^n\cdot(n-1)+1 \\ 0 & 2^{n+1}-2 \end{bmatrix}$ cuja soma dos quatro elementos é igual a $0+2\cdot\left(2^{n+1}-2\right)+\left(2^n\cdot(n-1)+1\right)=(n+3)\cdot 2^n-3.$

2ª SOLUÇÃO:

$B=\sum\limits_{k=1}^{n} A^k$ é a soma de uma progressão geométrica, onde o primeiro termo é a matriz A e a razão é a matriz A. Para encontrar B, vamos utilizar um procedimento análogo àquele usado para obter a fórmula da soma dos termos de uma P.G.. Assim, temos:

$$B=\sum_{k=1}^{n} A^k = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n$$

$$AB = A^2 + A^3 + \ldots + A^n + A^{n+1}$$

$$\Rightarrow AB - B = A^{n+1} - A \Leftrightarrow (A-I)B = A^{n+1} - A \Leftrightarrow B = (A-I)^{-1}\cdot\left(A^{n+1}-A\right)$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A - I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A-I)^{-1} = \frac{1}{1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como provamos na solução anterior: $A^{n+1} = 2^{n+1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & (n+1)/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Portanto,

$$B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} 2^{n+1} & 2^n\cdot(n+1) \\ 0 & 2^{n+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2^{n+1}-2 & 2^n\cdot(n+1)-1 \\ 0 & 2^{n+1}-2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{n+1}-2 & 2^n\cdot(n-1)+1 \\ 0 & 2^{n+1}-2 \end{bmatrix}$$

E a soma dos elementos é a mesma obtida na solução anterior.

12) (IME 2013) São dadas duas matrizes A e B tais que $A\cdot B=\begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}$ e $B\cdot A=\begin{bmatrix} x & 14 \\ 14 & y \end{bmatrix}$, com x e y reais e $x>y$. Determine:

a) o(s) valor(es) de x e y;

b) as matrizes A e B que satisfazem as equações apresentadas.

RESOLUÇÃO:

a)

Como $A\cdot B$ e $B\cdot A$ possuem a mesma ordem, então A e B são matrizes quadradas e podemos aplicar o teorema de Binet para o determinante do produto de matrizes, o que implica $\det(A\cdot B)=\det(B\cdot A)$.

Assim, temos: $\det(A\cdot B)=\det(B\cdot A)\Leftrightarrow 125-121=xy-196\Leftrightarrow xy=200.$

Sejam $A=\left(a_{ij}\right)_{2\times2}$ e $B=\left(b_{ij}\right)_{2\times2}$, então $\text{tr}(B\cdot A)=b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}$ e $\text{tr}(A\cdot B)=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}$, o que implica $\text{tr}(A\cdot B)=\text{tr}(B\cdot A)$.

Assim, temos: $x+y=5+25\Leftrightarrow x+y=30$.

Resolvendo o sistema $\begin{cases}x+y=30\\ x\cdot y=200\end{cases}$, temos $(x,y)=(20,10)$, já que $x>y$.

Portanto, $x=20$ e $y=10$.

b)

Seja $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ e $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$.

Como o produto de matrizes é associativo, temos: $(A\cdot B)\cdot A=A\cdot(B\cdot A)$.

Assim, podemos escrever:

$$(A\cdot B)\cdot A=A\cdot(B\cdot A)\Leftrightarrow\begin{bmatrix}5 & 11\\ 11 & 25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20 & 14\\ 14 & 10\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}5a+11c & 5b+11d\\ 11a+25c & 11b+25d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20a+14b & 14a+10b\\ 20c+14d & 14c+10d\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5a+11c=20a+14b\\ 5b+11d=14a+10b\\ 11a+25c=20c+14d\\ 11b+25d=14c+10d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}15a+14b-11c=0\\ 14a+5b-11d=0\\ 11a+5c-14d=0\\ 11b-14c+15d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=\dfrac{15}{11}a+\dfrac{14}{11}b\\ d=\dfrac{14}{11}a+\dfrac{5}{11}b\end{cases}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}a & b\\ \dfrac{15}{11}a+\dfrac{14}{11}b & \dfrac{14}{11}a+\dfrac{5}{11}b\end{bmatrix}$$

$$\det A=\frac{14a^2-10ab-14b^2}{11}\neq0\Leftrightarrow7\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\frac{a}{b}-7\neq0\Leftrightarrow\frac{a}{b}\neq\frac{5\pm\sqrt{221}}{14}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{11}{14a^2-10ab-14b^2}\begin{bmatrix}\dfrac{14}{11}a+\dfrac{5}{11}b & -b\\ -\dfrac{15}{11}a-\dfrac{14}{11}b & a\end{bmatrix}$$

$$B=A^{-1}\cdot(A\cdot B)=\frac{11}{14a^2-10ab-14b^2}\begin{bmatrix}\dfrac{14}{11}a+\dfrac{5}{11}b & -b\\ -\dfrac{15}{11}a-\dfrac{14}{11}b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 11\\ 11 & 25\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{7a^2-5ab-7b^2}\begin{bmatrix}35a-48b & 77a-110b\\ 23a-35b & 55a-77b\end{bmatrix}$$

13) (IME 2014) Seja a matriz $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$, em que $abc=1$. Sabe-se que $A^T \cdot A = I$, em que A^T é a matriz transposta de A e I é a matriz identidade de 3^a ordem. O produto dos possíveis valores de $a^3+b^3+c^3$ é

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

RESOLUÇÃO: d

1ª solução:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}=A^T$$

$$\Rightarrow A^TA=A^2=\begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2 & ab+bc+ac & ac+ab+bc \\ ab+bc+ca & a^2+b^2+c^2 & ab+bc+ac \\ ac+ab+bc & bc+ac+ab & a^2+b^2+c^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=1 \ \wedge \ ab+ac+bc=0$$

$$a^2+b^2+c^2=1 \Leftrightarrow (a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)=1 \Leftrightarrow (a+b+c)^2=1 \Leftrightarrow a+b+c=\pm 1$$

Lembrando a identidade de Gauss, temos:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=1\cdot(1-0)+3\cdot 1=4 \ \vee \ a^3+b^3+c^3=(-1)\cdot(1-0)+3\cdot 1=2$$

Portanto, o produto dos possíveis valores de $a^3+b^3+c^3$ é $4\cdot 2=8$.

2ª solução:

$$A^T\cdot A=I \Rightarrow \det\left(A^TA\right)=\det I \Leftrightarrow \det\left(A^T\right)\cdot\det(A)=1 \Leftrightarrow \det(A)\cdot\det(A)=1 \Leftrightarrow \det(A)=\pm 1$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=3abc-\left(a^3+b^3+c^3\right)=\pm 1 \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=3\pm 1$$

Portanto, $a^3+b^3+c^3=4$ ou $a^3+b^3+c^3=2$ e o produto dos possíveis valores de $a^3+b^3+c^3$ é $4\cdot 2=8$.

NOTA 1: O enunciado dessa questão foi corrigido, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta.

NOTA 2: Sobre a identidade de Gauss e o determinante do problema, veja a seção 1.1 do livro Mathematical Olympiad Treasures do Titu Andreescu e Bogdan Enescu.

14) (IME 2014) Calcule o determinante abaixo, no qual $\omega = \text{cis}\frac{2\pi}{3}$ e $i = \sqrt{-1}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & 0 & i \\ i & 1 & -i & \omega^2 \\ 1-i & \omega & i-1 & 1 \\ 0 & \omega & 1 & i \end{vmatrix}$$

RESOLUÇÃO:

$$\omega = \text{cis}\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \omega^3 = \text{cis}\,2\pi = 1$$

Vamos efetuar as transformações indicadas no determinante, com base no teorema de Jacobi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \omega & 0 & i \\ i & 1 & -i & \omega^2 \\ 1-i & \omega & i-1 & 1 \\ 0 & \omega & 1 & i \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & \omega & 0 & i \\ 0 & 1 & -i & \omega^2 \\ 0 & \omega & i-1 & 1 \\ 1 & \omega & 1 & i \end{vmatrix} \overset{L_4 \leftarrow L_4 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & \omega & 0 & i \\ 0 & 1 & -i & \omega^2 \\ 0 & \omega & i-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Aplicando o teorema de Laplace na 1ª coluna, temos:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -i & \omega^2 \\ \omega & i-1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{vmatrix} 1 & -i & \omega^3 \\ \omega & i-1 & \omega \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{vmatrix} 1 & -i & 1 \\ \omega & i-1 & \omega \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Note que multiplicamos a terceira coluna do determinante por ω e, em contrapartida, multiplicamos o determinante por $\frac{1}{\omega}$. Isso resultou em um determinante com a primeira e a terceira coluna iguais, que é nulo.

15) (IME 2015) Dada a matriz A, a soma do módulo dos valores de x que tornam o determinante da matriz A nulo é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2x & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & x-1 & 2 \\ 1 & x+4 & 0 & 0 \\ x & -1 & 1 & x-2 \end{bmatrix}$$

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

RESOLUÇÃO: a

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2x & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & x-1 & 2 \\ 1 & x+4 & 0 & 0 \\ x & -1 & 1 & x-2 \end{bmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{vmatrix} 1-2x^3 & x-1 & 2 \\ -x+4 & 0 & 0 \\ -1-2x^2 & 1 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(**)}{=} (-x+4) \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-4) \cdot [(x-1)(x-2)-2] \neq (x-4) \cdot x(x-3) = 0$$

$\Leftrightarrow x=4 \ \vee \ x=0 \ \vee \ x=3$

Portanto, a soma dos módulos dos valores de x é $|4|+|0|+|3|=4+0+3=7$.

16) (IME 2015) Sejam $S=a+b+c$ e $P=a\cdot b\cdot c$. Calcule o determinante abaixo unicamente em função de S e P.

$$\begin{vmatrix} a^2+(b+c)^2 & 2b^2 & (a+b)^2+c^2 \\ 2a^2 & (a+c)^2+b^2 & (a+b)^2+c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

RESOLUÇÃO:

Vamos realizar transformações no determinante com base no teorema de Jacobi e também colocando escalares em evidência.

$$\begin{vmatrix} a^2+(b+c)^2 & 2b^2 & (a+b)^2+c^2 \\ 2a^2 & (a+c)^2+b^2 & (a+b)^2+c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} \overset{L1\leftarrow L1-L2}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} (b+c)^2-a^2 & b^2-(a+c)^2 & 0 \\ 2a^2 & (a+c)^2+b^2 & (a+b)^2+c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} \overset{L2\leftarrow L2-2\cdot L3}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} (a+b+c)(-a+b+c) & (a+b+c)(-a+b-c) & 0 \\ 0 & (a+b+c)(a-b+c) & (a+b+c)(-a-b+c) \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} \overset{(*)}{=}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} (-a+b+c) & (-a+b-c) & 0 \\ 0 & (a-b+c) & (-a-b+c) \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} \overset{L1\leftarrow L1+L2}{=}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} (-a+b+c) & 0 & (-a-b+c) \\ 0 & (a-b+c) & (-a-b+c) \\ a^2 & b^2 & a^2+2ab+b^2 \end{vmatrix} \overset{C3\leftarrow C3-C1-C2}{=}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} (-a+b+c) & 0 & -2b \\ 0 & (a-b+c) & -2a \\ a^2 & b^2 & 2ab \end{vmatrix} \overset{(**)}{=}$$

$$= 2(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} (-a+b+c) & 0 & -b \\ 0 & (a-b+c) & -a \\ a^2 & b^2 & ab \end{vmatrix} \overset{L3\leftarrow L3+b\cdot L2}{=}$$

$$= 2(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} (-a+b+c) & 0 & -b \\ 0 & (a-b+c) & -a \\ a^2 & ab+bc & 0 \end{vmatrix} \overset{(***)}{=}$$

$$= 2(a+b+c)^2 \cdot \left[a^2 b(a-b+c) + a \cdot b(a+c) \cdot (-a+b+c)\right] =$$

$$= 2ab(a+b+c)^2 \cdot \left(a^2 - ab + ac - a^2 + ab + ac - ac + bc + c^2\right) =$$

$$= 2ab(a+b+c)^2 \cdot \left(ac + bc + c^2\right) = 2abc(a+b+c)^3 = 2PS^3$$

(*) Colocamos $(a+b+c)$ na 1ª e na 2ª linha.
(**) Colocamos 2 em evidência na 3ª coluna.
(***) Regra de Sarrus.

17) (IME 2016) Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$. O maior valor de a, com $a \neq 1$, que satisfaz $A^{24} = I$ é: (Observação: I é a matriz identidade 2×2)

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$ e) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$

RESOLUÇÃO: e
Pelo teorema de Binet, temos:

$$A^{24} = I \Rightarrow \det\left(A^{24}\right) = \det I \Leftrightarrow (\det A)^{24} = 1 \Leftrightarrow \det A = \pm 1$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a^2 + b^2$$

Como $a^2 + b^2 \geq 0$, então $\det A = a^2 + b^2 = 1$.

Como a e b são dois números que satisfazem $a^2 + b^2 = 1$, então podemos dizer que a é o cosseno de um ângulo e b será o seno desse mesmo ângulo. Assim, podemos escrever:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Essa é uma matriz de rotação de um ângulo de $-\theta$.

Vamos provar por indução finita que $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \operatorname{sen} n\theta \\ -\operatorname{sen} n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$.

1º) $A^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (verdadeira)

2º) Hipótese de indução: $A^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \operatorname{sen} k\theta \\ -\operatorname{sen} k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$

3º) Demonstração para $k+1$:

$$A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos k\theta & \operatorname{sen} k\theta \\ -\operatorname{sen} k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos k\theta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} k\theta & \cos\theta\operatorname{sen} k\theta + \operatorname{sen}\theta\cos k\theta \\ -\operatorname{sen}\theta\cos k\theta - \cos\theta\operatorname{sen} k\theta & -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} k\theta + \cos\theta\cos k\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos[(k+1)\theta] & \operatorname{sen}[(k+1)\theta] \\ -\operatorname{sen}[(k+1)\theta] & \cos[(k+1)\theta] \end{bmatrix}$$

Logo, pelo P.I.F., vale $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \operatorname{sen} n\theta \\ -\operatorname{sen} n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

$$\Rightarrow A^{24} = \begin{bmatrix} \cos 24\theta & \operatorname{sen} 24\theta \\ -\operatorname{sen} 24\theta & \cos 24\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \cos 24\theta = 1 \Leftrightarrow 24\theta = 2k\pi, \theta \in \mathbb{Z}$$

Considerando apenas as soluções no 1º e 2º quadrantes, pois aparecem todos os valores de cosseno, temos: $\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{12}, \pi\right\}$

Como $a = \cos\theta$ e $a \neq 1$, o maior valor de a ocorre para o menor valor de θ , ou seja, $\theta = \frac{\pi}{12}$, o que implica $a_{max} = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

BIZU:

A matriz $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ é a matriz de rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário.

18) (IME 2016) Define-se A como a matriz 2016×2016, cujos elementos satisfazem à igualdade:

$$a_{i,j} = \binom{i+j-2}{j-1}, \text{ para } i, j \in \{1, 2, \ldots, 2016\}.$$

Calcule o determinante de A.

RESOLUÇÃO:

Seja D_n o determinante de uma matriz da mesma forma de A, mas com ordem n.

$$D_n=\begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \binom{3}{3} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \binom{4}{3} & \cdots & \binom{n}{n-1} \\ \binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \binom{4}{2} & \binom{5}{3} & \cdots & \binom{n+1}{n-1} \\ \binom{3}{0} & \binom{4}{1} & \binom{5}{2} & \binom{6}{3} & \cdots & \binom{n+2}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n+1}{2} & \binom{n+2}{3} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}_n$$

Considerando a relação de Stifel $\binom{m-1}{p-1}+\binom{m-1}{p}=\binom{m}{p} \Leftrightarrow \binom{m}{p}-\binom{m-1}{p-1}=\binom{m-1}{p}$, e subtraindo da coluna n a coluna $(n-1)$, da coluna $(n-1)$ a coluna $(n-2)$, e assim por diante, até subtrairmos da coluna 2 a coluna 1, temos:

$$D_n=\begin{vmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \binom{3}{3} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \binom{4}{3} & \cdots & \binom{n}{n-1} \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{4}{2} & \binom{5}{3} & \cdots & \binom{n+1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n+1}{3} & \cdots & \binom{2n-3}{n-1} \end{vmatrix}_n$$

Novamente, subtraindo da coluna n a coluna $(n-1)$, da coluna $(n-1)$ a coluna $(n-2)$, e assim por diante, até subtrairmos da coluna 3 a coluna 2, temos:

$$D_n = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \binom{3}{3} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{4}{3} & \cdots & \binom{n}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \binom{n}{3} & \cdots & \binom{2n-4}{n-1} \end{vmatrix}_n$$

Repetindo o mesmo procedimento até subtrairmos apenas da coluna n a coluna $(n-1)$, temos:

$$D_n = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \end{vmatrix}_n$$

O determinante obtido é o determinante de uma matriz triangular inferior, então ele é igual ao produto dos elementos da diagonal principal. Assim,

$$D_n = \binom{0}{0} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{2}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{n-1}{n-1} = 1.$$

Portanto, para $n = 2016$, $\det(A) = D_{2016} = 1$.

19) (IME 2017) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ a-2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ com $a \in \mathbb{R}$. Sabe-se que $\det(A^2 - 2A + I) = 16$. A soma dos valores de a que satisfazem essa condição é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

RESOLUÇÃO: d

$$\det\left(A^2-2A+I\right)=16 \Leftrightarrow \det\left((A-I)^2\right)=16 \Leftrightarrow \left(\det(A-I)\right)^2=16 \Leftrightarrow \det(A-I)=\pm 4$$

$$A-I=\begin{bmatrix} 0 & a & -2 \\ a-2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A-I)=2a+6(a-2)=8a-12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8a-12=4 \Leftrightarrow a=2 \\ 8a-12=-4 \Leftrightarrow a=1 \end{cases}$$

Logo, a soma dos valores de a é $2+1=3$.

BIZU:

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$$

Note que, em geral as matrizes não são comutativas, ou seja, $AB \neq BA$.

No problema é apresentado um caso particular:

$$(A-I)^2=A^2-AI-IA+I^2=A^2-A-A+I=A^2-2A+I$$

20) (IME 2017) Seja M uma matriz real 2×2. Defina uma função f na qual cada elemento da matriz se desloca para a posição seguinte no sentido horário, ou seja, se $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, implica que $f(M)=\begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$. Encontre todas as matrizes simétricas 2×2 reais na qual $M^2=f(M)$.

RESOLUÇÃO:

Seja $M=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ uma matriz simétrica de ordem 2, então temos:

$$M^2=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{bmatrix}$$

$$f(M)=\begin{bmatrix} b & a \\ c & b \end{bmatrix}$$

$$M^2=f(M) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b & a \\ c & b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=b & (1) \\ ab+bc=a & (2) \\ b^2+c^2=b & (3) \\ ab+bc=c & (4) \end{cases}$$

De (2) e (4), conclui-se que: $a=c$.

O sistema então reduz-se a: $\begin{cases} a^2+b^2=b \\ 2ab=a \end{cases}$.

Vamos analisar a segunda igualdade: $2ab=a \Leftrightarrow a=0$ ou $b=\frac{1}{2}$.

Substituindo esses resultados na primeira equação, temos:

$a = 0 \Rightarrow b^2 = b \Leftrightarrow b = 0$ ou $b = 1$

$b = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \pm\frac{1}{2}$.

Logo, as matrizes que satisfazem as condições são $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

BIZU:
Matriz simétrica é aquela em que $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$, ou seja, elementos simétricos em relação à diagonal principal são iguais. Uma matriz simétrica é igual à sua transposta.
Matriz antissimétrica é aquela em que $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$, ou seja, elementos simétricos em relação à diagonal principal são simétricos. Uma matriz simétrica tem diagonal principal nula e é igual à menos a sua transposta.

21) (IME 2017) Classifique o sistema abaixo como determinado, possível indeterminado e impossível de acordo com os valores reais de m.

$$\begin{cases} (m-2)x + 2y - z = m+1 \\ 2x + my + 2z = m^2 + 2 \\ 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z = m^3 + 3 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO:
Vamos analisar o determinante da matriz incompleta do sistema.

$$\delta = \begin{vmatrix} (m-2) & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2(m+1) & (m+1) \end{vmatrix} =$$

$$= m(m^2 - m - 2) + 8m - 4(m+1) + 2m^2 - 4(m+1) - 4(m^2 - m - 2) =$$

$$= m^3 - 3m^2 + 2m = m(m-1)(m-2)$$

1º) Se $m \neq 0$, $m \neq 1$ e $m \neq 2$, então $\delta \neq 0$, o que implica que o sistema é possível e determinado.

2º) $m = 0$

$$\begin{cases} -2x + 2y - z = 1 \\ 2x + 2z = 2 \\ 2y + z = 3 \end{cases} \overset{L2 \leftarrow L2+L1}{\sim} \begin{cases} -2x + 2y - z = 1 \\ 2y + z = 3 \\ 2y + z = 3 \end{cases} \overset{L3 \leftarrow L3-L2}{\sim} \begin{cases} -2x + 2y - z = 1 \\ 2y + z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Como a terceira equação do sistema escalonado é da forma $0 = 0$, então o sistema é possível e indeterminado.

3º) $m = 1$

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ 2x + 4y + 2z = 4 \end{cases} \underset{L3 \leftarrow L3+2 \cdot L1}{\overset{L2 \leftarrow L2+2 \cdot L1}{\sim}} \begin{cases} -x + 2y - z = 2 \\ 5y = 7 \\ 8y = 8 \end{cases} \overset{L3 \leftarrow \frac{5}{8} \cdot L3 - L2}{\sim} \begin{cases} -x + 2y - z = 2 \\ 5y = 7 \\ 0 = -2 \end{cases}$$

Como a terceira equação do sistema escalonado é da forma $0=-2$, então o sistema é impossível.

4º) $m=2$

$$\begin{cases}2y-z=3\\2x+2y+2z=6\\4x+6y+3z=11\end{cases}\underset{\substack{L2\leftarrow L1\\L3\leftarrow L3-4\cdot L1}}{\overset{L1\leftarrow L2/2}{\sim}}\begin{cases}x+y+z=3\\2y-z=3\\2y-z=-1\end{cases}\underset{L3\leftarrow L3-L2}{\sim}\begin{cases}x+y+z=3\\2y-z=3\\0=-4\end{cases}$$

Como a terceira equação do sistema escalonado é da forma $0=-4$, então o sistema é impossível.

Portanto, se $m\neq 0$, $m\neq 1$ e $m\neq 2$, o sistema é possível e determinado; se $m=0$, o sistema é possível e indeterminado; e se $m=1$ ou $m=2$, o sistema é impossível.

22) (IME 2018) Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 os quatro primeiros termos de uma P.A. com $x_1=x$ e razão r, com $x,r\in\mathbb{R}$. O determinante de $\begin{vmatrix}x_1&x_1&x_1&x_1\\x_1&x_2&x_2&x_2\\x_1&x_2&x_3&x_3\\x_1&x_2&x_3&x_4\end{vmatrix}$ é:

a) 0 b) $x^4\cdot r$ c) $x^4\cdot r^3$ d) $x\cdot r^4$ e) $x\cdot r^3$

RESOLUÇÃO: e

A sequência x_1, x_2, x_3 e x_4 é uma P.A. de primeiro termo $x_1=x$ e razão r, então $x_2-x_1=r$, $x_3-x_1=2r$ e $x_4-x_1=3r$.

Considerando o teorema de Jacobi, vamos subtrair a primeira linha de cada uma das outras linhas.

$$\begin{vmatrix}x_1&x_1&x_1&x_1\\x_1&x_2&x_2&x_2\\x_1&x_2&x_3&x_3\\x_1&x_2&x_3&x_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1&x_1&x_1&x_1\\0&x_2-x_1&x_2-x_1&x_2-x_1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1&x_3-x_1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1&x_4-x_1\end{vmatrix}\overset{(*)}{=}x\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&r&r&r\\0&r&2r&2r\\0&r&2r&3r\end{vmatrix}\overset{(**)}{=}$$

$$=x\cdot r^3\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&2&2\\0&1&2&3\end{vmatrix}\underset{L3\leftarrow L3-L2}{\overset{L4\leftarrow L4-L3}{=}}x\cdot r^3\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}\overset{(***)}{=}x\cdot r^3\cdot 1^4=x\cdot r^3$$

(*) Colocamos $x=x_1$ em evidência na 1ª linha.

(**) Colocamos r em evidência na 2ª, 3ª e 4ª linhas.

(***) O determinante é determinante de uma matriz triangular superior, então é o produto dos elementos da diagonal principal.

23) (IME 2018) Seja o seguinte sistema de equações, em que s é um número real:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - sx_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ sx_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Escolha uma faixa de valores de s em que as soluções do sistema são todas negativas.

a) $s < -2$ b) $-2 < s < 0$ c) $0 < s < 1$ d) $1 < s < 2$ e) $s > 2$

RESOLUÇÃO: d

Vamos analisar o determinante da matriz incompleta do sistema.

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -s \\ -2 & 1 & 1 \\ s & -2 & 0 \end{vmatrix} = s - 4s + s^2 + 2 = s^2 - 3s + 2 = (s-1)(s-2)$$

1º) $s = 1 \Rightarrow \delta = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \underset{L3 \leftarrow L3 - L1}{\overset{L2 \leftarrow L2 + 2 \cdot L1}{\sim}} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \overset{L3 \leftarrow L3 + L2}{\sim} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Como a terceira equação no sistema escalonado é da forma $0 = 1$, então o sistema é impossível.

2º) $s = 2 \Rightarrow \delta = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \underset{L3 \leftarrow L3 - 2L1}{\overset{L2 \leftarrow L2 + 2 \cdot L1}{\sim}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = 1 \\ -4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \overset{L3 \leftarrow \frac{3}{4} \cdot L3 + L2}{\sim} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Como a terceira equação no sistema escalonado é da forma $0 = 1$, então o sistema é impossível.

3º) $s \neq 1 \ \wedge \ s \neq 2 \Rightarrow \delta \neq 0$

Nesse caso, o sistema é possível e determinado, e, pela regra de Cramer, as soluções são dadas por

$$x_1 = \frac{\delta_1}{\delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -s \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -s \\ -2 & 1 & 1 \\ s & -2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2s}{(s-1)(s-2)} < 0 \Leftrightarrow s < 0 \ \vee \ 1 < s < 2$$

$$x_2 = \frac{\delta_2}{\delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -s \\ -2 & 1 & 1 \\ s & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -s \\ -2 & 1 & 1 \\ s & -2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{s^2}{(s-1)(s-2)} < 0 \Leftrightarrow 1 < s < 2$$

$$x_3=\frac{\delta_3}{\delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&0\\-2&1&1\\s&-2&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&-s\\-2&1&1\\s&-2&0\end{vmatrix}}=\frac{s+2}{(s-1)(s-2)}<0\Leftrightarrow s<-2\ \vee\ 1<s<2$$

Fazendo a interseção dos três conjuntos, encontramos os valores de s que tornam as três soluções do sistema negativas, que são $1<s<2$.

24) (IME 2018) Seja a matriz $A=\begin{bmatrix}k&-3\\4&2\end{bmatrix}$, com k real. Determine a faixa de valores de k para que exista uma matriz de números reais P tal que as condições abaixo sejam atendidas simultaneamente:

a) $A^TP+PA=I$ em que A^T é a transposta da matriz A e I é a matriz identidade;
b) P seja simétrica;
c) $p_{11}>0$, em que p_{11} é o elemento da linha 1 e coluna 1 de P; e
d) $|P|>0$, em que $|P|$ é o determinante da matriz P.

RESOLUÇÃO: $k>-2$

Seja P uma matriz 2×2, simétrica com elemento da linha 1 e coluna 1 positivo e determinante positivo, então P pode ser escrita na forma $P=\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}$, onde $a>0$ e $|P|=ac-b^2>0$.

Vamos agora fazer a matriz P satisfazer a expressão a).

$$A^TP+PA=\begin{bmatrix}k&4\\-3&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k&-3\\4&2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}ka+4b&kb+4c\\-3a+2b&-3b+2c\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}ka+4b&-3a+2b\\kb+4c&-3b+2c\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2ka+8b&-3a+(k+2)b+4c\\-3a+(k+2)b+4c&-6b+4c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

A última igualdade é equivalente ao seguinte sistema.

$$\begin{cases}2ka+8b=1\\-3a+(k+2)b+4c=0\\-6b+4c=1\end{cases}$$

A matriz incompleta do sistema nas variáveis a, b e c é $B=\begin{bmatrix}2k&8&0\\-3&(k+2)&4\\0&-6&4\end{bmatrix}$.

Se $|B|\neq 0$, então o sistema é possível e determinado e a matriz P é única.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2k & 8 & 0 \\ -3 & (k+2) & 4 \\ 0 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 8k(k+2) + 96 + 48k = 8(k^2 + 8k + 12) = 8(k+2)(k+6) \neq 0$$

$\Leftrightarrow k \neq -2 \ \wedge \ k \neq -6$

Se $k = -2$, o sistema resultante é impossível.

$$\begin{cases} -4a + 8b + 0c = 1 \\ -3a + 0b + 4c = 0 \\ 0a - 6b + 4c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 0b + 4c = 0 \\ -4a + 8b + 0c = 1 \\ 0a - 6b + 4c = 1 \end{cases} \underset{L3 \leftarrow L3 - L1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -3a + 0b + 4c = 0 \\ -4a + 8b + 0c = 1 \\ 3a - 6b + 0c = 1 \end{cases} \underset{L3 \leftarrow L3 \div 3}{\overset{L2 \leftarrow L2 \div 4}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 0b + 4c = 0 \\ -a + 2b + 0c = 1/4 \\ a - 2b + 0c = 1/3 \end{cases} \underset{L3 \leftarrow L3 + L2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -3a + 0b + 4c = 0 \\ -a + 2b + 0c = 1/4 \\ 0a + 0b + 0c = 7/12 \end{cases}$$

Se $k = -6$, o sistema resultante é impossível.

$$\begin{cases} -12a + 8b + 0c = 1 \\ -3a - 4b + 4c = 0 \\ 0a - 6b + 4c = 1 \end{cases} \overset{L1 \leftarrow L1 \div (-4)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3a - 2b + 0c = -1/4 \\ -3a - 4b + 4c = 0 \\ 0a - 6b + 4c = 1 \end{cases} \overset{L2 \leftarrow L2 + L1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3a - 2b + 0c = -1/4 \\ 0a - 6b + 4c = -1/4 \\ 0a - 6b + 4c = 1 \end{cases}$$

$$\underset{L3 \leftarrow L3 - L2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3a - 2b + 0c = -1/4 \\ 0a - 6b + 4c = -1/4 \\ 0a + 0b + 0c = 5/4 \end{cases}$$

Assim, os únicos casos em que o sistema é compatível são $k \neq -2$ e $k \neq -6$, nos quais o sistema é possível e determinado.

Devemos agora garantir o atendimento às condições das alíneas c) e d): $a > 0$ e $|P| = ac - b^2 > 0$.

Pela regra de Cramer, as soluções do sistema são

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 0 & (k+2) & 4 \\ 1 & -6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2k & 8 & 0 \\ -3 & (k+2) & 4 \\ 0 & -6 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{(k+16)}{2(k+2)(k+6)} > 0 \Leftrightarrow -16 < k < -6 \ \vee \ k > -2 \quad (*)$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 2k & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2k & 8 & 0 \\ -3 & (k+2) & 4 \\ 0 & -6 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{12 - 8k}{8(k+2)(k+6)} = \frac{-(2k-3)}{2(k+2)(k+6)}$$

$$c=\frac{\begin{vmatrix}2k & 8 & 1\\ -3 & (k+2) & 0\\ 0 & -6 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2k & 8 & 0\\ -3 & (k+2) & 4\\ 0 & -6 & 4\end{vmatrix}}=\frac{k^2+2k+21}{4(k+2)(k+6)}$$

$$|P|=ac-b^2=\frac{(k+16)}{2(k+2)(k+6)}\cdot\frac{k^2+2k+21}{4(k+2)(k+6)}-\frac{(2k-3)^2}{4(k+2)^2(k+6)^2}>0$$

$$\Leftrightarrow\frac{k^3+10k^2+77k+318}{8(k+2)^2(k+6)^2}>0\Leftrightarrow\frac{(k+6)(k^2+4k+53)}{8(k+2)^2(k+6)^2}>0$$

O discriminante de $k^2+4k+53$ é $\Delta=4^2-4\cdot1\cdot53=-196<0,$ então essa expressão é sempre positiva para k real. Assim, temos:

$$|P|=\frac{(k+6)(k^2+4k+53)}{8(k+2)^2(k+6)^2}>0\Leftrightarrow k>-6\ \wedge\ k\neq-2\ \ (**)$$

Fazendo a interseção das condições (*) e (**), temos: $k>-2.$

25) (IME 2019) Calcule o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ \log 81 & \log 900 & \log 300\\ (\log 9)^2 & 2+4\log 3+2(\log 3)^2 & (\log 3+2)^2\end{vmatrix}$$

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16

RESOLUÇÃO: e

Observe que o determinante parece o determinante de uma matriz de Vandermonde. Vamos “ajeitar” os logaritmos para evidenciar isso.

$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ \log 81 & \log 900 & \log 300\\ (\log 9)^2 & 2+4\log 3+2(\log 3)^2 & (\log 3+2)^2\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ \log 3^4 & \log(3^2\cdot10^2) & \log(3\cdot10^2)\\ (\log 3^2)^2 & 2+4\log 3+2(\log 3)^2 & (\log 3+2)^2\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ 4\cdot\log 3 & 2\cdot\log 3+2\log 10 & \log 3+2\log 10\\ (2\cdot\log 3)^2 & 2\left[1+2\log 3+(\log 3)^2\right] & (\log 3+2)^2\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ 4\cdot\log 3 & 2\cdot(\log 3+1) & \log 3+2\\ 4\cdot(\log 3)^2 & 2\cdot(\log 3+1)^2 & (\log 3+2)^2\end{vmatrix}=$$

$$=8\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \log 3 & \log 3+1 & \log 3+2 \\ (\log 3)^2 & (\log 3+1)^2 & (\log 3+2)^2 \end{vmatrix}$$

O determinante anterior é o determinante de uma matriz de Vandermonde, então
$\Delta=8\cdot\left[(\log 3+2)-(\log 3+1)\right]\left[(\log 3+2)-\log 3\right]\left[(\log 3+1)-\log 3\right]=8\cdot 1\cdot 2\cdot 1=16.$

26) (IME 2019) Dadas as funções definidas nos reais $\mathbb{R}$:
$f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=\operatorname{sen} x$, $f_3(x)=\cos x$, $f_4(x)=\operatorname{sen} 2x$ e $f_5(x)=e^{-x}$.
Mostre que existe uma única solução a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, tal que $a_1f_1(x)+a_2f_2(x)+a_3f_3(x)+a_4f_4(x)+a_5f_5(x)$ seja a função constante nula, onde $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\in\mathbb{R}$.

RESOLUÇÃO:
Seja $F(x)=a_1\cdot e^x+a_2\operatorname{sen} x+a_3\cos x+a_4\operatorname{sen} 2x+a_5\cdot e^{-x}$ e sabendo que $F(x)=0$, $\forall x$, então temos:

$F(0)=a_1+a_3+a_5=0$

$F(\pi)=a_1\cdot e^{\pi}-a_3+a_5\cdot e^{-\pi}=0$

$F(2\pi)=a_1\cdot e^{2\pi}+a_3+a_5\cdot e^{-2\pi}=0$

Esse é um sistema homogêneo e o determinante da sua matriz incompleta é

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{\pi} & -1 & e^{-\pi} \\ e^{2\pi} & 1 & e^{-2\pi} \end{vmatrix}=\left(-1-e^{\pi}\right)\cdot\left(e^{-\pi}-e^{\pi}\right)\cdot\left(e^{-\pi}+1\right)\neq 0$$

Note que o determinante acima é o determinante de uma matriz de Vandermonde.
O determinante da matriz incompleta é não nulo, então o sistema é possível e determinado.
Mas, como o sistema é homogêneo, então a única solução é a solução trivial, o que implica $a_1=a_3=a_5=0$.
Assim, teremos de $F(x)=a_2\operatorname{sen} x+a_4\operatorname{sen} 2x$, e podemos fazer

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=a_2\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+a_4\cdot\operatorname{sen}\pi=a_2=0$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=a_4\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=a_4=0$$

Logo, a única solução é $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=0$.

27) (IME 2020) Uma matriz A é semelhante a uma matriz B se, e somente se, existe uma matriz P tal que $A=P\cdot B\cdot P^{-1}$.
a) Se A e B forem semelhantes, mostre que $\det(A)=\det(B)$.

b) Dadas $C=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ e $D=\begin{pmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$. Verifique se essas matrizes são semelhantes.

RESOLUÇÃO:

a) Se A e B são semelhantes, então $A=P\cdot B\cdot P^{-1}\Rightarrow \det(A)=\det\left(P\cdot B\cdot P^{-1}\right)$

Pelo teorema de Binet, temos: $\det(A)=\det(P)\cdot\det(B)\cdot\det\left(P^{-1}\right)$

$$\det\left(P^{-1}\right)=\frac{1}{\det(P)}\Rightarrow \det(A)=\det(P)\cdot\det(B)\cdot\frac{1}{\det(P)}=\det(B)\ \text{(C.Q.D.)}$$

b)

$$C=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow \det(C)=4\cdot 5-3\cdot 2=14$$

$$D=\begin{pmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(C)=8\cdot 1-(-2)\cdot 3=14$$

Como $\det(C)=\det(D)=14$, as matrizes satisfazem à condição necessária para que sejam semelhantes.

Note, entretanto, que a condição anterior não é uma condição suficiente, então temos que identificar se existe uma matriz P tal que $C=P\cdot D\cdot P^{-1}$.

Seja P uma matriz quadrada de ordem 2 da forma $P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ tal que $C=P\cdot D\cdot P^{-1}$.

Multiplicando a igualdade por P à direita, temos:

$$C=P\cdot D\cdot P^{-1}\Leftrightarrow C\cdot P=P\cdot D\cdot P^{-1}\cdot P\Leftrightarrow C\cdot P=P\cdot D\cdot I\Leftrightarrow C\cdot P=P\cdot D$$

$$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4a+2c & 4b+2d\\ 3a+5c & 3b+5d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8a+3b & -2a+b\\ 8c+3d & -2c+d\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4a+2c=8a+3b\\ 4b+2d=-2a+b\\ 3a+5c=8c+3d\\ 3b+5d=-2c+d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+3b-2c=0\\ 2a+3b+2d=0\\ a-c-d=0\\ 3b+2c+4d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-c-d=0\\ 4a+3b-2c=0\\ 2a+3b+2d=0\\ 3b+2c+4d=0\end{cases}$$

$$\underset{L3\leftarrow L3-2\cdot L1}{\overset{L2\leftarrow L2-4\cdot L1}{\Leftrightarrow}}\begin{cases}a-c-d=0\\ 3b+2c+4d=0\\ 3b+2c+4d=0\\ 3b+2c+4d=0\end{cases}\underset{\substack{L3\leftarrow L3-L2\\ L4\leftarrow L4-L2}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}a-c-d=0\\ 3b+2c+4d=0\\ 0=0\\ 0=0\end{cases}$$

O sistema tem dois graus de liberdade, então vamos adotar os parâmetros $a=\alpha$ e $b=2\beta$.

$$a=\alpha\ \wedge\ b=2\beta\Rightarrow\begin{cases}c=a-d=\alpha-d\\ 2c=-3b-4d=-6\beta-4d\Leftrightarrow c=-3\beta-2d\end{cases}$$

$$-3\beta-2d=\alpha-d\Leftrightarrow d=-\alpha-3\beta$$

$$c=\alpha-d=\alpha-(-\alpha-3\beta)=2\alpha+3\beta$$

$$\Rightarrow P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & 2\beta\\ 2\alpha+3\beta & -\alpha-3\beta\end{pmatrix}$$

Um exemplo de matriz P, para $\alpha = \beta = 1$, é $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Portanto, as matrizes C e D são semelhantes.