AULÃO BRASIL

MATRIZES E DETERMINANTES

RENATO MADEIRA

27 de junho de 2020

MADEMATICA

mademática.blogspot.com

foco ensino personalizado

1) (ITA 2002) O seguinte trecho de artigo de um jornal local relata uma corrida beneficente de bicicletas:

"Alguns segundos após a largada, Ralf tomou a liderança, seguido de perto por David e Rubinho, nesta ordem. Daí em diante, eles não mais deixaram as primeiras três posições e, em nenhum momento da corrida, estiveram lado a lado mais do que dois competidores. A liderança, no entanto, mudou de mãos nove vezes entre os três, enquanto que em mais oito ocasiões diferentes aqueles que corriam na segunda e terceira posições trocaram de lugar entre si. Após o término da corrida, Rubinho reclamou para nossos repórteres que David havia conduzido sua bicicleta de forma imprudente pouco antes da bandeirada de chegada. Desse modo, logo atrás de David, Rubinho não pôde ultrapassá-lo no final da corrida."

Com base no trecho acima, você conclui que

a) David ganhou a corrida.

b) Ralf ganhou a corrida.

c) Rubinho chegou em terceiro lugar.

d) Ralf chegou em segundo lugar.

e) Não é possível determinar a ordem de chegada, porque o trecho não apresenta uma descrição matematicamente correta.

RESOLUÇÃO:

Representemos Ralf por 1, David por 2 e Rubinho por 3.

Em cada momento da corrida, a classificação é uma terna ordenada desses três números, e a classificação inicial é dada por $(1;2;3)$, denominada permutação fundamental.

Permutação fundamental: 1, 2, 3 par
1, 3, 2 ímpar
3, 1, 2 par
3, 2, 1 ímpar
2, 3, 1 par
2, 1, 3 ímpar

Como a liderança mudou de mãos 9 vezes, e em mais 8 ocasiões aqueles que corriam na segunda e terceira posições trocaram de lugar entre si, houve no total 17 inversões (trocas de posições nas ternas ordenadas).

Como houve um número ímpar de inversões, a classificação final deve ser uma permutação de classe ímpar, ou seja, $(2;1;3)$, $(1;3;2)$ ou $(3;2;1)$.

Na situação descrita, Rubinho chegou logo atrás de David, portanto a classificação final é $(1;2;3)$ ou $(2;3;1)$, que são ambas permutações de classe par, o que contradiz nossa conclusão anterior.

Consequentemente, não é possível determinar a ordem de chegada, porque o trecho não apresenta uma descrição matematicamente correta.

Note que foi utilizado o **teorema de Bézout** que estabelece que uma permutação muda de classe quando se troca a posição de dois quaisquer de seus elementos.

RESPOSTA: e

2) (ITA 2006) Se $\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$, então o valor do $\det\begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$ é igual a:

a) 0
b) 4
c) 8
d) 12
e) 16

RESOLUÇÃO:

$$\det\begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix} \overset{(1)}{=} (-2)\cdot 3\cdot \det\begin{bmatrix} a & b & c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ x & y & z \end{bmatrix} \overset{(2)}{=}$$

$$= -6\cdot\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ 2p & 2q & 2r \\ x & y & z \end{bmatrix} \overset{(3)}{=} (-6)\cdot 2\cdot \det\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -12\cdot(-1) = 12$$

(1) Coloca-se -2 em evidência na primeira linha e 3 em evidência na terceira linha.

(2) Subtrai-se a terceira linha da segunda linha.

(3) Coloca-se 2 em evidência na segunda linha.

RESPOSTA: d

3) (IME 2012) São dadas as matrizes quadradas inversíveis A, B e C, de ordem 3. Sabe-se que o determinante de C vale $(4-x)$, onde x é um número real, o determinante da matriz inversa de B vale $-\frac{1}{3}$ e que $\left(CA^t\right)^t = P^{-1}BP$, onde P é uma matriz inversível.

Sabendo que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, determine os possíveis valores de x.

Obs.: $(M)^t$ é a matriz transposta de M.

a) -1 e 3

b) 1 e -3

c) 2 e 3

d) 1 e 3

e) -2 e -3

RESOLUÇÃO:

$$\det C = 4 - x$$

$$\det\left(B^{-1}\right) = \frac{1}{\det B} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \det B = -3$$

$$\left(CA^{t}\right)^{t} = P^{-1}BP \Rightarrow \det\left(CA^{t}\right)^{t} = \det\left(P^{-1}BP\right) \Leftrightarrow \det\left(CA^{t}\right) = \det P^{-1} \cdot \det B \cdot \det P$$

$$\Leftrightarrow \det C \cdot \det A^{t} = \frac{1}{\det P} \cdot \det B \cdot \det P \Leftrightarrow \det C \cdot \det A = \det B$$

$$\Leftrightarrow \det A = \frac{\det B}{\det C} = \frac{-3}{4-x}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{3}{x-4} \Leftrightarrow -x = \frac{3}{x-4} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = 3$$

RESPOSTA: d

4) (ITA 2008) Sejam A e C matrizes $n \times n$ inversíveis tais que $\det\left(I + C^{-1}A\right) = \frac{1}{3}$ e $\det A = 5$. Sabendo-se que $B = 3\left(A^{-1} + C^{-1}\right)^t$, então o determinante de B é igual a

a) 3^n

b) $2 \cdot \frac{3^n}{5^2}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{3^{n-1}}{5}$

e) $5 \cdot 3^{n-1}$

RESOLUÇÃO:

$$\det\left(I + C^{-1}A\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \det\left(A^{-1}A + C^{-1}A\right) = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\left(A^{-1} + C^{-1}\right)A\right) = \frac{1}{3} \overset{\text{Teo.Binet}}{\Leftrightarrow} \det\left(A^{-1} + C^{-1}\right) \cdot \det A = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(A^{-1} + C^{-1}\right) \cdot 5 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \det\left(A^{-1} + C^{-1}\right) = \frac{1}{15}$$

$$B = 3\left(A^{-1} + C^{-1}\right)^t \Rightarrow \det B = \det\left[3\left(A^{-1} + C^{-1}\right)^t\right] \Leftrightarrow \det B = 3^n \cdot \det\left(A^{-1} + C^{-1}\right)^t$$

$$\Leftrightarrow \det B = 3^n \cdot \det\left(A^{-1} + C^{-1}\right) \Leftrightarrow \det B = 3^n \cdot \frac{1}{15} \Leftrightarrow \det B = \frac{3^{n-1}}{5}$$

RESPOSTA: d

5) (ITA 2013) Considere $A \in M_{5\times 5}(\mathbb{R})$ com $\det(A) = \sqrt{6}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $\det(\alpha A^t A A^t) = \sqrt{6}\,\alpha^2$, o valor de α é

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$

d) 1

e) $\sqrt{216}$

RESOLUÇÃO:

A matriz A^tAA^t é de ordem 5 e, portanto, o determinante de um escalar vezes essa matriz é igual ao escalar elevado à quinta potência multiplicado pelo determinante da matriz.

$$\det\left(\alpha A^tAA^t\right)=\sqrt{6}\,\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^5\cdot\det\left(A^tAA^t\right)=\sqrt{6}\,\alpha^2 \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} \det\left(A^tAA^t\right)=\frac{\sqrt{6}}{\alpha^3}.$$

Considerando o teorema de Binet e também que $\det\left(A^t\right)=\det A$, temos:

$$\det\left(A^tAA^t\right)=\frac{\sqrt{6}}{\alpha^3} \Leftrightarrow \det\left(A^t\right)\cdot\det A\cdot\det\left(A^t\right)=\frac{\sqrt{6}}{\alpha^3}$$

$$\Leftrightarrow \det A\cdot\det A\cdot\det A=\frac{\sqrt{6}}{\alpha^3} \Leftrightarrow (\det A)^3=\frac{\sqrt{6}}{\alpha^3}.$$

$$\det A = \sqrt{6} \ \wedge \ (\det A)^3 = \frac{\sqrt{6}}{\alpha^3} \Rightarrow \left(\sqrt{6}\right)^3 = \frac{\sqrt{6}}{\alpha^3} \Leftrightarrow \alpha^3 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{6}} = \frac{\sqrt[3]{36}}{6}.$$

RESPOSTA: c

6) (IME 2019) Calcule o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ \log 81 & \log 900 & \log 300 \\ (\log 9)^2 & 2+4\log 3+2(\log 3)^2 & (\log 3+2)^2 \end{vmatrix}$$

a) 1
b) 2
c) 4
d) 8
e) 16

RESOLUÇÃO:

Observe que o determinante parece o determinante de uma matriz de Vandermonde. Vamos “ajeitar” os logaritmos para evidenciar isso.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ \log 81 & \log 900 & \log 300 \\ (\log 9)^2 & 2+4\log 3+2(\log 3)^2 & (\log 3+2)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ \log 3^4 & \log\left(3^2 \cdot 10^2\right) & \log\left(3\cdot 10^2\right) \\ \left(\log 3^2\right)^2 & 2+4\log 3+2(\log 3)^2 & (\log 3+2)^2 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4\cdot\log 3 & 2\cdot\log 3+2\log 10 & \log 3+2\log 10 \\ (2\cdot\log 3)^2 & 2\left[1+2\log 3+(\log 3)^2\right] & (\log 3+2)^2 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4\cdot\log 3 & 2\cdot(\log 3+1) & \log 3+2 \\ 4\cdot(\log 3)^2 & 2\cdot(\log 3+1)^2 & (\log 3+2)^2 \end{vmatrix}=$$

$$=8\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 3+1 & \log 3+2 \\ (\log 3)^2 & (\log 3+1)^2 & (\log 3+2)^2 \end{vmatrix}$$

O determinante anterior é o determinante de uma matriz de Vandermonde, então

$$\Delta = 8 \cdot \left[(\log 3 + 2) - (\log 3 + 1) \right] \left[(\log 3 + 2) - \log 3 \right] \left[(\log 3 + 1) - \log 3 \right]$$
$$= 8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 16.$$

RESPOSTA: e

7) (IME 2019) Dadas as funções definidas nos reais $\mathbb{R}$:

$$f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = \operatorname{sen} x,\ f_3(x) = \cos x,\ f_4(x) = \operatorname{sen} 2x \text{ e } f_5(x) = e^{-x}.$$

Mostre que existe uma única solução $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$, tal que

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) + a_4 f_4(x) + a_5 f_5(x)$$

seja a função constante nula, onde $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$.

RESOLUÇÃO:

Seja $F(x) = a_1 \cdot e^x + a_2 \operatorname{sen} x + a_3 \cos x + a_4 \operatorname{sen} 2x + a_5 \cdot e^{-x}$ e sabendo que $F(x) = 0$, $\forall x$, então temos:

$$F(0) = a_1 + a_3 + a_5 = 0$$
$$F(\pi) = a_1 \cdot e^{\pi} - a_3 + a_5 \cdot e^{-\pi} = 0$$
$$F(2\pi) = a_1 \cdot e^{2\pi} + a_3 + a_5 \cdot e^{-2\pi} = 0$$

Esse é um sistema homogêneo e o determinante da sua matriz incompleta é

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{\pi} & -1 & e^{-\pi} \\ e^{2\pi} & (-1)^2 & e^{-2\pi} \end{vmatrix} = \left(-1 - e^{\pi}\right) \cdot \left(e^{-\pi} - e^{\pi}\right) \cdot \left(e^{-\pi} + 1\right) \neq 0$$

Note que o determinante acima é o determinante de uma matriz de Vandermonde.

O determinante da matriz incompleta é não nulo, então o sistema é possível e determinado.

Mas, como o sistema é homogêneo, então a única solução é a solução trivial, o que implica $a_1 = a_3 = a_5 = 0$.

Assim, teremos de $F(x) = a_2 \operatorname{sen} x + a_4 \operatorname{sen} 2x,$ e podemos fazer

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = a_2 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + a_4 \cdot \operatorname{sen}\pi = a_2 = 0$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = a_4 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = a_4 = 0$$

Logo, a única solução é $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$.

8) (ITA 2003) Sejam A e P matrizes $n \times n$ inversíveis e $B = P^{-1}AP$. Das afirmações:

I. B^T é inversível e $\left(B^T\right)^{-1} = \left(B^{-1}\right)^T$.

II. Se A é simétrica, então B também o é.

III. $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

é (são) verdadeira(s):

a) todas

b) apenas I.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) apenas II e III.

RESOLUÇÃO:

Se A e P são inversíveis, então $\det A \neq 0$ e $\det P \neq 0$.

$(*)$ teorema de Binet $\quad (**)\ \det\left(P^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det P}$

I. VERDADEIRA

$$B = P^{-1}AP \Rightarrow \det B = \det\left(P^{-1}AP\right) \overset{(*)}{=} \det\left(P^{-1}\right) \cdot \det A \cdot \det P \overset{(**)}{=}$$

$$= \frac{1}{\det P} \cdot \det A \cdot \det P = \det A \neq 0$$

$\Rightarrow \det\left(B^T\right) = \det B \neq 0 \Rightarrow B^T$ é inversível.

Além disso, $\left(B^{-1}\right)^T \cdot B^T = \left(B \cdot B^{-1}\right)^T = I^T = I \Leftrightarrow \left(B^{-1}\right)^T \cdot B^T = I \Rightarrow \left(B^T\right)^{-1} = \left(B^{-1}\right)^T$.

Observe que B^{-1} existe, pois $\det B \neq 0$, o que implica que B é inversível.

Note também que usamos $(AB)^T = B^T A^T$ e que, se $AB = I$, então $B = A^{-1}$.

II. FALSA

A é simétrica $\Leftrightarrow A^T = A$

Contraexemplo: Sejam a matriz simétrica e inversível $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e a matriz inversível $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $P^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

que não é simétrica.

Note que, se a matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é inversível $(\det M \neq 0)$, então a sua matriz inversa é dada por $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

III. VERDADEIRA

$$B = P^{-1}AP \Leftrightarrow B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda I = P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda P) = P^{-1}(A - \lambda I)P$$

$$\Rightarrow \det(B - \lambda I) = \det\left[P^{-1}(A - \lambda I)P\right] \overset{(*)}{=} \det\left(P^{-1}\right) \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det P \overset{(**)}{=}$$

$$= \frac{1}{\det P} \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det P = \det(A - \lambda I)$$

RESPOSTA: d

9) (IME 2012) Calcule as raízes de $f(x)$ em função de a, b e c, sendo a, b, c e $x \in \mathbb{R}$ (real) e $f(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$.

RESOLUÇÃO:

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ x+a+b+c & x & c & b \\ x+a+b+c & c & x & a \\ x+a+b+c & b & a & x \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} (x+a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & x & c & b \\ 1 & c & x & a \\ 1 & b & a & x \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=}$$

(1) Adicionou-se à primeira coluna a segunda, a terceira e a quarta colunas;
(2) Colocou-se $(x+a+b+c)$ em evidência na primeira coluna;
(3) Aplicou-se a regra de Chió no elemento a_{11};

$$=(x+a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} x-a & c-b & b-c \\ c-a & x-b & a-c \\ b-a & a-b & x-c \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} (x+a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} x-a+b-c & c-b & b-c \\ 0 & x-b & a-c \\ x-a+b-c & a-b & x-c \end{vmatrix} \overset{(5)}{=}$$

(4) Adicionou-se à primeira coluna a terceira coluna;
(5) Colocou-se $(x-a+b-c)$ em evidência na primeira coluna;

$$=(x+a+b+c)\cdot(x-a+b-c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & c-b & b-c \\ 0 & x-b & a-c \\ 1 & a-b & x-c \end{vmatrix} \overset{(6)}{=}$$

(6) Aplicou-se a regra de Chió no elemento a_{11};

$$=(x+a+b+c)\cdot(x-a+b-c)\cdot\begin{vmatrix} x-b & a-c \\ a-c & x-b \end{vmatrix}\overset{(7)}{=}$$

(7) Adicionou-se a segunda coluna à primeira coluna;

$$=(x+a+b+c)\cdot(x-a+b-c)\cdot\begin{vmatrix} x+a-b-c & a-c \\ x+a-b-c & x-b \end{vmatrix}\overset{(8)}{=}$$

(8) Colocou-se $(x+a-b-c)$ em evidência na primeira coluna; e

$$=(x+a+b+c)\cdot(x-a+b-c)\cdot(x+a-b-c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & a-c \\ 1 & x-b \end{vmatrix}\overset{(9)}{=}$$

(9) Calculou-se o determinante da matriz 2×2.

$$=(x+a+b+c)\cdot(x-a+b-c)\cdot(x+a-b-c)\cdot(x-a-b+c)$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow (x+a+b+c)(x-a+b-c)(x+a-b-c)(x-a-b+c)=0$$

$$\Leftrightarrow S=\{-a-b-c, a-b+c, -a+b+c, a+b-c\}$$

10) (IME 2014) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$, em que $abc = 1$. Sabe-se que $A^T \cdot A = I$, em que A^T é a matriz transposta de A e I é a matriz identidade de 3^a ordem. O produto dos possíveis valores de $a^3 + b^3 + c^3$ é

a) 2

b) 4

c) 6

d) 8

e) 10

RESOLUÇÃO:

1ª solução:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}=A^T$$

$$\Rightarrow A^TA=A^2=\begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2 & ab+bc+ac & ac+ab+bc \\ ab+bc+ca & a^2+b^2+c^2 & ab+bc+ac \\ ac+ab+bc & bc+ac+ab & a^2+b^2+c^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=1 \ \wedge \ ab+ac+bc=0$$

$$a^2+b^2+c^2=1 \Leftrightarrow (a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)=1 \Leftrightarrow (a+b+c)^2=1 \Leftrightarrow a+b+c=\pm 1$$

Lembrando a identidade de Gauss, temos:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=1\cdot(1-0)+3\cdot 1=4 \ \vee \ a^3+b^3+c^3=(-1)\cdot(1-0)+3\cdot 1=2$$

Portanto, o produto dos possíveis valores de $a^3+b^3+c^3$ é $4\cdot 2=8$.

2ª solução:

$$A^T \cdot A = I \Rightarrow \det\left(A^T A\right) = \det I \Leftrightarrow \det\left(A^T\right) \cdot \det(A) = 1$$

$$\Leftrightarrow \det(A) \cdot \det(A) = 1 \Leftrightarrow \det(A) = \pm 1$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3abc - \left(a^3 + b^3 + c^3\right) = \pm 1 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3 \pm 1$$

Portanto, $a^3 + b^3 + c^3 = 4$ ou $a^3 + b^3 + c^3 = 2$ e o produto dos possíveis valores de $a^3 + b^3 + c^3$ é $4 \cdot 2 = 8$.

RESPOSTA: d

OBRIGADO E BOM *GAGÁ*!!!

mademática.blogspot.com
facebook.com/madematica

facebook.com/FocoNoEnsino
instagram.com/foco.no.ensino/

CONTATO: madematica@gmail.com